FUNKCIJSKE VRSTE

$f_n : I \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je fijska vrsta.

ŽE PRI OBIČAJNIH VRSTAH JE ČESTO NE DA VRSTE RAZPISATI, LAHKO PA SE DOKAŽE KONVERGENCO:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$$

Def.:
fijska vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x$ konv. po točkah na I, če konvergira $\forall x \in I$.

Def.:
fijska vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x$ konv. enak. na I, če

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq n_0\ \forall x \in I : \left| \sum_{n=N}^{\infty} f_n x \right| < \varepsilon .$$

Velja: fijska vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x$ konv. enak. na $I \Longrightarrow$ členi vrste enakomerno konvergirajo k $f(x) = 0$

Velja: fijska vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x$ konv. enak. na I in $\forall n : f_n$ zvezna, potem je $\left(x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x\right)$ zvezna na I.

Weierstrassov kriterij za enakomerno konvergenco:

Let $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x$, $f_n : I \to \mathbb{R}$. Let $|f_n x| \leq c_n\ \forall x \in I$, $c_n \in \mathbb{R}$.

Če $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira, potem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x$ konvergira enakomerno na I.

N

Dana je fijska vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$. Določi definicijsko območje vrste N za katere $x \in \mathbb{R}$ ta vrsta konvergira?

$$\frac{1}{x-2} + \frac{\sqrt{2}}{(x-2)^2} + \frac{\sqrt{3}}{(x-2)^3} + \dots$$

gotovo $x \neq 2$.
opazimo, da za x blizu 2 vrsta verjetno divergira (veliki členi)

fiksiramo x in uporabimo nek kriterij:
pogledamo kvocientni kriterij:

kvoc. krit. za $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

če $q > 1$ divergira
$q < 1$ konvergira
$q = 1$ ne vemo

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{(x-2)^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}\,(x-2)^n}{\sqrt{n}\,(x-2)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\,(x-2)} \right| =$$

NAROBE! Tu predpostavljam, da limita obstaja!

$$= \left|\frac{1}{x-2}\right| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{1}{x-2}\right| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \left|\frac{1}{x-2}\right| \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}} \quad \text{L.H.}$$

sama pozitivna števila, ne potrebujemo več $||$.

$$= \left|\frac{1}{x-2}\right| \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1}} \qquad \left|\frac{1}{x-2}\right|$$

kdaj je $\left|\frac{1}{x-2}\right| < 1$?

$$|x-2| > 1$$

$x > 3$ ali $x < 1$

torej $x \in \mathbb{R} \setminus [1, 3]$ konvergira.

$x \in (1, 3)$ divergira.

kaj pa $x \in \{1, 3\}$?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n}$ divergira, saj $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n} \neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1^n}$ divergira, saj $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1^n} \neq 0$

N

Pokaži, da funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{e^{n^2|x|}}$ konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$.

Za začetek preverimo konvergenco po točkah:

$$x=0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{1} = 0 \quad \checkmark \; *$$

Poglejmo posamezen člen: fiksirajmo x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2}{e^{n^2|x|}} \overset{L.H.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2n}x^2}{\cancel{2n}|x|e^{n^2|x|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{|x|e^{n^2|x|}} = 0$$

To ni zadosten pogoj za konvergenco vrste, je pa potreben.

Fiksirajmo x in uporabimo kvocientni kriterij, $x\neq 0$ ($x=0$ smo preverili *)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2x^2}{e^{(n+1)^2|x|}}}{\frac{n^2x^2}{e^{n^2|x|}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2 \cancel{x^2}\, e^{n^2|x|}}{n^2\cancel{x^2}\, e^{(n+1)^2|x|}} \right| = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}}_{=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^2|x|}}{e^{(n+1)^2|x|}}}_{=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{(n+1)^2|x|-n^2|x|}}} =$$

vse pozitivno

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}_{=1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{(n+1)^2|x|-n^2|x|}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{|x|((n+1)^2-n^2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{|x|(\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{|x|(2n+1)}} = 0$$

Ja, konvergira PO TOČKAH $\forall x \in \mathbb{R}$. Sedaj še enakomerno.

Uporabimo Weierstrassov kriterij.

Poglejmo $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{n^2x^2}{e^{n^2|x|}}\right|$ za nek fiksen n.

dovolj je gledati: $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{n^2x^2}{e^{n^2x}}$, ker je soda fja s pozitivnimi vredn.

dobimo stac. točke za kandidate za max.

$$\frac{d\,\frac{n^2x^2}{e^{n^2x}}}{dx} = \frac{2xn^2e^{n^2x} - n^2x^2n^2e^{n^2x}}{e^{2n^2x}} =$$

$$= \frac{xn^2e^{n^2x}(2-n^2x)}{e^{2n^2x}} = 0$$

kandidat je še $x=\infty$

$$xn^2e^{n^2x}(2-n^2x) = 0 \qquad x = 0$$

$$2-n^2x=0$$

$$x = \frac{2}{n^2}$$

$f_n(0)=0$

$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \cdots = 0$

$$f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) = \frac{n^2\left(\frac{2}{n^2}\right)^2}{e^{n^2\left|\frac{2}{n^2}\right|}} = \frac{\cancel{n^2}\,\frac{4}{n^{\cancel{4}\,2}}}{e^2} = \frac{4}{n^2e^2}$$

vsi členi so $\le \frac{4}{n^2e^2}$

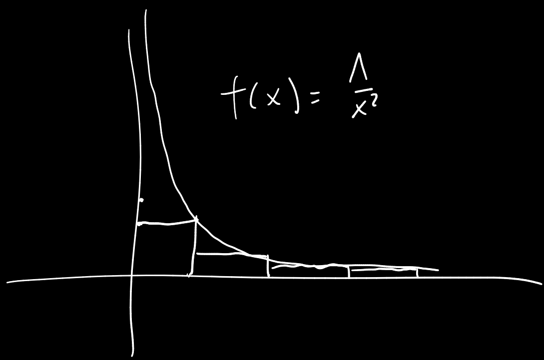
ali konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2e^2} = \frac{4}{e^2}\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \to$ ja.

konvergira. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ konvergira $\Leftrightarrow r>1$.

torej po weierstrassu konvergira enakomerno.

INTEGRALSKI KRITERIJ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1$$

Če je $f(n)$ monotono padajoča fja $f_n \geq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f x\,dx$ konvergira.

N

Dana je fijska vrsta $W(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$. Pokaži, da konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$ in pokaži, da je $W(x)$ zvezna na $\mathbb{R}$.

postopamo z weierstrassom

$$\left|\frac{\sin(2^n x)}{2^n}\right| \le \left|\frac{1}{2^n}\right| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

največ 1

vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^n}\right|$ konvergira, saj je geometrijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2}\right|^n$.

Torej W konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$. Ali je $W(x)$ zvezna na $\mathbb{R}$?

Enakomerna konvergenca + členi so zvezni na $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ $W(x)$ zvezna na $\mathbb{R}$ ✓

Dana je funkcijska vrsta $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Določi definicijsko območje $\zeta(x)$. A je tam zvezna? A je tam konvergira enakomerno?

ZNANO DEJSTVO $D_\zeta = (1, \infty)$

Če velja ______, velja tudi ______; saj je vrsta zveznih funkcij. Verjetno ne.

Poskusimo dokazati enakomerno konvergenco na $[a, \infty)$ za $a>1$.

Weierstraß!

$$\left|\frac{1}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^a} \quad \forall x \in [a, \infty)$$

poljuben n fiksen.

ker $a>1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konvergira.

Torej naša vrsta konvergira enakomerno $\forall x \in [a, \infty)$ $\forall a > 1$.

A je torej $\zeta(x)$ zvezna na $(1, \infty)$? Da, po definiciji odprtih množic.

to ni kar $(1, \infty)$, saj je tisti konvergenčni pas širok odvisno od a! vendar za zveznost je dovolj.

Weierstraßov kriterij: najdi y, da velja

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^1} \quad \forall x \in (1, \infty),$$

je $x = 1$, tedaj pa $\frac{1}{n}$ ne konvergira. Weierstraß ni uporaben.

UTEMELJIMO BOLJ DIREKTNO.

Vzemimo poljubno velik $N \in \mathbb{N}$ in ga fiksiramo. Ključno $\forall x \in (1, \infty)$.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\right| \geq \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n^x} = \underbrace{\frac{1}{N^x} + \frac{1}{(N+1)^x} + \dots + \frac{1}{(2N)^x}}_{N \text{ členov}} > \frac{1}{(2N)^x} \cdot N$$

najmanjši

$\lim_{x \downarrow 1} \frac{N}{2Nx} = \boxed{\frac{1}{2}}$. $\forall N \; \exists x \in (1, \infty) \ni$: $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^x} > \boxed{\frac{1}{4}} \Rightarrow$

↳ x blizu 1

:2 za vsak slučaj

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ NE konvergira enakomerno na $(1, \infty)$.

(po definiciji enakomerne konvergence)

KAJ VELJA za fijske vrste?

(i.) $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezne in $\sum_{n=1}^{\infty} f_n x$ konvergira enakomerno na $[a,b]$. Potem $\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n t\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n t \, dt$

(zamenjamo lahko $\int$ in Σ)

(ii.) Naj fijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n x$ konvergira po točkah na I in $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n odvedljiva na I. Če $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' x$ konvergira enakomerno na I $\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n x\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' x$.

(zamenjamo lahko odvod in ∞).

N

Dana je fijska vrsta $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{a^n}$, kjer $a > 2$.

a.) Pokaži, da je f zvezna na $\mathbb{R}$.

b.) Pokaži, da je f odvedljiva na $\mathbb{R}$.

a.) ali f konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$?

Weierstraß!

max 1

$\left|\frac{\sin(2^n x)}{a^n}\right| \leq \left|\frac{1}{a^n}\right| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ja, konvergira enakomerno.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^2$ je geometrijska vrsta, ki konvergira.

torej f je zvezna, ker so f_n zvezne

b) odvajajmo po členih:

$$\frac{d\left(\frac{\sin(2^n x)}{a^n}\right)}{dx} = \frac{1}{a^n}\cdot 2^n \cdot \cos(2^n x) = \left(\frac{2}{a}\right)^n \cos(2^n x)$$

$$f'x = \sum_{n=1}^{\infty} f'_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n \cos(2^n x)$$

ali to enakomerno konvergira?

Weierstraß!

$$\left(\frac{2}{a}\right)^n \cos(2^n x) \leq \boxed{\left(\frac{2}{a}\right)^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n$ je spet konvergentna geometrijska vrsta

$a > 2$

↳ konvergira celo enakomerno, kar je več, kot je potrebno za Weierstr.

torej $f'x = \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n \cos(2^n x)}$ ✓

↳ še vemo, da je zvezna!

(enak. konv + zvezne)

---

kaj pa, če bi želeli izračunati vsoto takole:

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x =$ {kompozitum element. f.} ?

tipično to ne gre, razen pri „znanih vrstah"

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \overset{|x|<1}{=} \frac{1}{1-x}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

N

Dana je fijsta vrsta $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx e^{-nx^2}$

a.) $D_f = ?$ (določi konvergenčno območje fijske vrste)

b.) ali ta fijsta vrsta konv. enak. na D_f?

c.) ali fijsta vrsta konv. enak. na $[a, \infty)$, $a > 0$?

d.) seštej dano fijsto vrsto!

a.) f_n liha. $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ konvergira.

↳ za vse $x > 0$, za katere konvergira, konvergira tudi za $-x$.

↳ $x > 0$. uporabimo korenski kriterij:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{nx e^{-nx^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{x}}{\cancel{\sqrt[n]{}}\, e^{\cancel{n}x^2}} = \frac{1}{e^{x^2}} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\, \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\to 1} =$$

$$= \frac{1}{e^{x^2}}.$$

tdaj je $\frac{1}{e^{x^2}} < 1$

$e^{x^2} > 1$

$x^2 > \ln 1$

$x^2 > 0$

$\Updownarrow$

$x \neq 0$

torej vrsta konvergira na $\mathbb{R}$.

b.) Potreben pogoj je, da členi vrste enakomerno konvergirajo na $\mathbb{R}$ k 0.

Pa preverimo:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n x - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n x| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{nx}{e^{-nx^2}} \right| =$$

liha

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{nx}{e^{-nx^2}}$$

kandidati: $x = \infty$

in stac. tč.:

$$\frac{d\,\frac{nx}{e^{-nx^2}}}{dx} = \frac{n\cancel{e^{-nx^2}} - nx\cancel{e^{-nx^2}}(-n2x)}{e^{-2nx^2}} =$$

$= 0$ $\qquad f\left(\sqrt{1/2n}\right) = \dfrac{n\sqrt{1/2n}}{e^{n \cdot 1/2n}} = \sqrt{n/2e}$

$n - nx\, 2xn = 0$

$2n^2x^2 = n$

$x^2 = \dfrac{1}{2n^{\cancel{2}}}$

$x = \sqrt{\dfrac{1}{2n}}$ kandidat

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(|f_n x - 0|\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2e}} = \infty \neq 0$$

$\Rightarrow$ členi fijste vrste NE konv. enak. na $\mathbb{R}$ k 0. $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{e^{-nx^2}}$ ne konv. enak. na $\mathbb{R}$.