TANGENTNA RAVNINA NA GRAF $f(x,y)$

$f: D \overset{odp.}{\subseteq} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, parc. odv.

TANGENTNA RAVNINA na graf f v (x_0, y_0) je ravnina, ki gre skozi tč. $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ in ima normalo

$$\vec{n} = \left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right)$$

$\swarrow$

dobimo enačbo tang. ravn.

če je f diferenciabilna v (x_0,y_0), $\Rightarrow$ tangentna ravnina se dobro prilega grafu f,

če pa f ni dif., pa ne nujno.

Tang. ravn. je graf funkcije $r(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$$f(x,y) - r(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

če je f diferenciabilna v (x_0,y_0), je $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)-r(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Zdg.: ~~tangenta~~ ravnina je dober lokalni približek

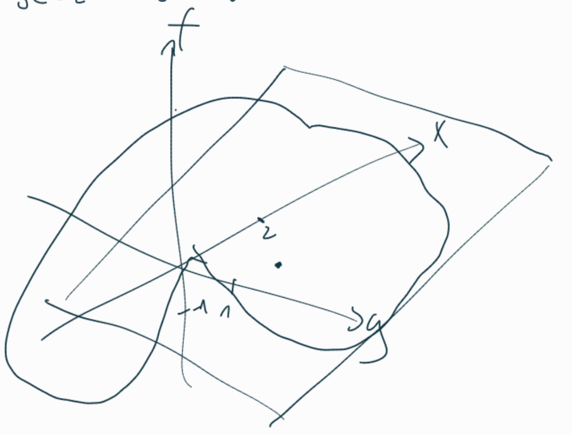
N

Dana je $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y - y^2 + x$

a.) Poišči enačbo T.R. v točki $(1,2,f(1,2))$

b.) Poišči vse točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, za katere je T.R. v tč. $(x,y,f(x,y))$ skozi $(0,0,0)$

a.)



$f_x = 2xy + 1$; $f_x(1,2) = 5$

$f_y = x^2 - 2y$; $f_y(1,2) = -3$

$\Downarrow$

$$\vec{n} = (-5, 3, 1)$$

$$-5x + 3y + 1z = \vec{n}\cdot(1,2,-1) = 0$$

b.)

enačba T.R.:

$$-f_x(x,y)X - f_y(x,y)Y + Z =$$

$$= \vec{n}\cdot(x,y,f(x,y)) =$$

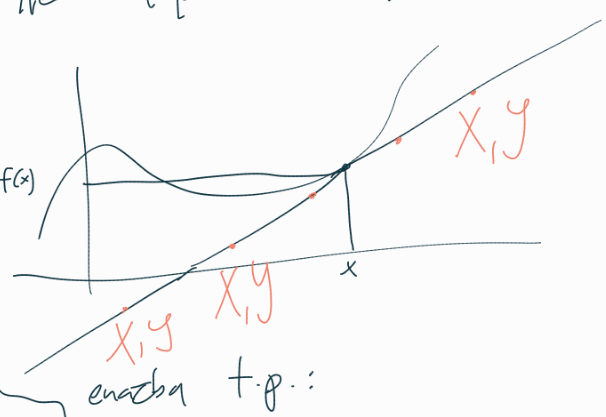
$$= f(x,y) - f_y(x,y)y - f_x(x,y)x$$

$\Downarrow$

$$Z = f(x,y) + f_x(x,y)(X-x) + f_y(Y-y)$$

enačba T.R. v poljubni točki, kjer je $(x,y,f(x,y))$ dotikališče T.R. in f

Tre 1 spr in t. premi:



enačba t.p.:

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

$$Y = f'(x)X + (f(x) - xf'(x))$$

zapišimo to enačbo za našo f-jo:

$$f(x,y) = x^2y - y^2 + x$$
$$f_x(x,y) = 2xy + 1$$
$$f_y(x,y) = x^2 - 2y$$

$$Z = x^2y - y^2 + x + (2xy+1)(X - x) + (x^2 - 2y)(Y - y)$$

najdimo take x, y, da je $X = Y = Z = 0$

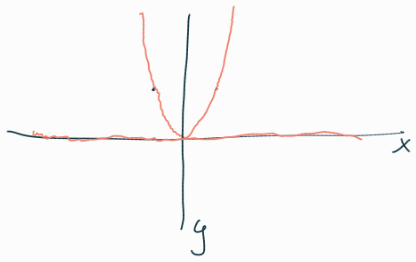
$$\cancel{x^2y} - \cancel{y^2} + \cancel{x} - 2x^2y - \cancel{x} - \cancel{x^2y} + \cancel{2}y^2 = 0$$

$$y^2 - 2x^2y = 0$$

$$y(y - 2x^2) = 0$$

tako ~~bodisi~~ $y = 0$ x kakoli

kot tudi ~~bodisi~~ $y = 2x^2$



N

let $f: D \to \mathbb{R}$, D odp $\subseteq \mathbb{R}^2$, f parc. odv.

a.) Kateremu pogoju mora zadoščati f, da bo tang. ravn. na graf f skozi izhodišče za vse $(x,y) \in D$.

enakost $Z = f(x,y) + f_x(x,y)(X - x) + f_y(x,y)(Y - y)$

mora veljati za $Z = X = Y = 0$ $\forall x, y$

pogoj: $x f_x(x,y) + y f_y(x,y) = f(x,y)$

b.) let $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poljubna odv. f-ja. A f-ja

$f(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x^2}{y}$ zadošča pogoju iz a.)?

$$f_x(x,y) = h'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{-y}{\cancel{x^2}}\frac{\cancel{x^2}}{y} + h\left(\frac{y}{x}\right)\frac{2x}{y} = h\left(\frac{y}{x}\right)\frac{2x}{y} - h'\frac{y}{x}$$

$$f_y(x,y) = h'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{\cancel{x}}\frac{x^{\cancel{2}}}{y} + h\left(\frac{y}{x}\right)\frac{-x^2}{y^2} = \frac{x}{y}h'\frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}h\frac{y}{x}$$

$$x\left(h\left(\frac{y}{x}\right)\frac{2x}{y} - h'\frac{y}{x}\right) + y\left(\frac{x}{y}h'\frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}h\frac{y}{x}\right) = \dots = \frac{x^2}{y}h\frac{y}{x} = f(x,y) \checkmark$$

JA!

c.) Pokaži, da diferenciabilna f-ja $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}$ zadošča na območju $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ enačbi $x f_x(x,y) + y f_y(x,y) = f(x,y)$

$$\Updownarrow$$

velja enakost $f(tx, ty) = t f(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in $t > 0$

DOKAZ: (cont.)

(⇐) predp.: $f(tx,ty) = t f(x,y)$, $\Rightarrow$ dokaži

$xf_x + yf_y = f$

VERIŽNO PRAVILO:

$f(x,y)$; $\varphi(u,v)$; $\psi(u,v)$

$G(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$

$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}$

$G_v = f_x \varphi_v + f_y \psi_v$

$f(tx,ty) = t f(x,y) \quad / \frac{d}{dt}$

$f_x(tx,ty)\,x + f_y(tx,ty)\,y = f(x,y)$

$\Downarrow$ za $t=1$

$f_x(x,y)\,x + f_y(x,y)\,y = f(x,y)$

(⇒): p. $x f_x(x,y)\, x + f_y(x,y)\, y = f(x,y) \Rightarrow f(tx,ty) = t f(x,y)$

za poljubna fiksna x,y glejmo

$F(t) = f(tx,ty) - t f(x,y) \quad / \frac{d}{dt}$

opazimo za $t=1$ $F(t)=0$

$F'(t) = x f_x(tx,ty) + y f_y(tx,ty) - f(x,y) =$

$= \frac{t\left(x f_x(tx,ty) + y f_y(tx,ty) - f(x,y)\right)}{t}$

$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = f(x,y)$ ← PREDPOSTAVKA

$= \frac{tx f_x(tx,ty) + ty f_y(tx,ty)}{t} - f(x,y) =$

$= \frac{f(tx,ty) - t f(x,y)}{t} = \frac{F(t)}{t}$

$F(t)$ je torej taka, da

$F(1) = 0$ in $F'(t) = \frac{F(t)}{t} \xrightarrow{\text{imamo rešitev}} F(t) = 0 \quad \forall t>0$

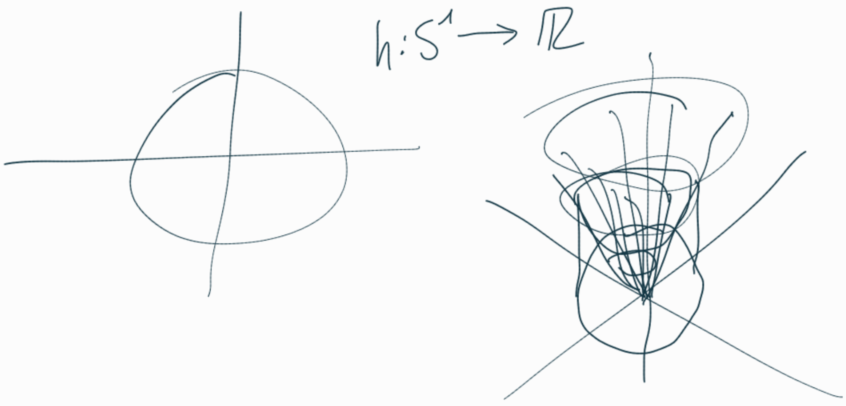
izposodimo si iz prihodnosti ← (glej poglavje o diferencialnih enačbah, tam sledi: $F(t)=0$ je edina rešitev te enačbe)

in je za vse t $F(t)=0$, torej

$f(tx,ty) = t f(x,y) \quad \forall t>0$

en možen način opisa vseh dif. f. z eno spr:

$h: S^1 \to \mathbb{R}$



d.) Poišči vse diferenciabilne f-je $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ki zadoščajo $xf_x + yf_y = f$

od prej vemo: $f(tx,ty)=t\, f(x,y)$ $\forall (x,y)\neq(0,0)$, $t>0$

f diferenc. v $(0,0)$ $\Rightarrow$ f zvezna v $(0,0)$

$\Downarrow$

$$f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{\text{zveznost}}{=} \lim_{t\downarrow 0} f(t,t) = \lim_{t\downarrow0} t f(1,1)=0$$

ker je po predp. difer., je v $(0,0)$ f parc. odv. po x in y.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} =$$

odvedlj. $$= \lim_{h\downarrow0}\frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\downarrow0}\frac{h\, f(1,0)}{h} = f(1,0)$$

$$f_y(0,0)=\dots=f(0,1)$$

ker je f diferenciabilna v 0, ∃ poljuben smerni odvod

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} =$$

$\vec{s} \to (a,b)$

$$=\lim_{t\downarrow0}\frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\downarrow0}\frac{t\, f(a,b)}{t} = f(a,b)$$

vemo: $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = \vec{s}\cdot \operatorname{grad} f$

$$f(a,b) = a\, f(1,0) + b\, f(0,1)$$

$$f(x,y) = x \underbrace{f(1,0)}_{\text{konst}} + y \underbrace{f(0,1)}_{\text{konst}}$$

$$\boxed{f(x,y)=x\alpha+y\beta}$$

↳ čim dodamo v Df $(0,0)$ in je tam diferenciabilna, ostaneja le še ravnine skozi $(0,0,0)$

N

IZREK O IMPLICITNI f-ji:

Pogosto imamo neko f-jo podano implicitno

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad f(x,y)$

$N=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ f(x,y)=0\}$

ali enačba $f(x,y)=0$ implicitno določa takšno f-jo $h(x)$, da je $f(x,h(x))=0$

IZREK: Naj $D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^2$ in $f: D \to \mathbb{R}$ zvezno parc. odv. f-ja.

Naj $(a,b) \in D$ taka, da je $f(a,b) = 0$ in naj $f_y(a,b) \neq 0$.

Tedaj obstaja okolica U točke a in natanko ena zv. odv. $h: U \to \mathbb{R}$ $\ni$: $h(a) = b$ in $f(x, h(x)) = 0$ za vse $x \in U$.

zdb.: lokalno lahko ničle f-je opišemo z grafom f-je ene spremenljivke.

na kratko: $f(x,y) = 0$ implicitno določa neko f-jo $h(x)$ v okolici neke t.

iz f lahko izrazimo y kot funkcijo x

N

dana je $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = xy^2 - 3y - e^x$

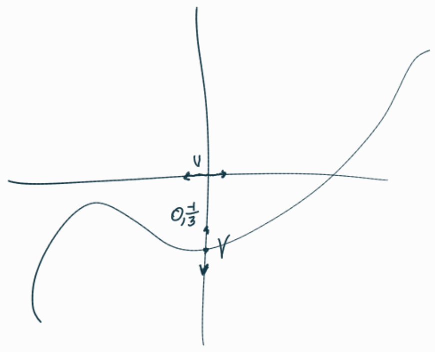
a) Poišči kakšno točko $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; da je $f(x_0, y_0) = 0$

b.) ali $\exists$ okolica U t.č. x_0 in zvezno odvedljiva $h: U \to \mathbb{R}$ $\ni$: $h(x_0) = y_0$ in $f(x, h(x)) = 0$ $\forall x \in U$

c.) ali $\exists$ okolica V t.č. y_0 in zv. odv. f-ja $g: V \to \mathbb{R}$ $\ni$: $g(y_0) = x_0$ in $f(g(y), y) = 0$ $\forall y \in V$

a.) $f(0, \frac{-1}{3}) = 0$ $\quad$ b.) $f_y(x,y) = 2xy - 3$ $\quad f_y(0, \frac{-1}{3}) = -3 \neq 0$

po izreku $\exists$ okolica $(0, \frac{-1}{3})$ U in $h: U \to \mathbb{R}$ $\ni$: $h(0) = \frac{-1}{3}$ in $f(x, h(x)) = 0$ $\forall x \in U$



Kaj pa kot graf f-je po y?

$f_x(x,y) = y^2 - e^x$

$f_x(0, \frac{-1}{3}) = \frac{1}{9} - 1 \neq 0$ $\checkmark$

$\exists$ okolica $(0, \frac{-1}{3})$ V; $\exists!\, h: U \to \mathbb{R}$ $\ni$: $h(0) = \frac{-1}{3}$ in $f(x, h(x)) = 0$ $\forall x \in U$

Katera f-ja pa je to? $\quad f(x,y) = xy^2 - 3y - e^x$

$$x h^2 x - 3 h x - e^x = 0$$

$D = b^2 - 4ac = 9 + 4xe^x$

vprašanje: ali lahko izrazimo x iz te enačbe?

$$h(x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4xe^x}}{2x}$$

veljati mora $\lim_{h \to 0} f(h) = \frac{1}{3}$

samo ena rešitev:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{-1}{3} & ; h = 0 \\ \frac{3 - \sqrt{9 + 4xe^x}}{2x} & ; h \neq 0 \end{cases}$$

in velja

IZREK O IMPLICITNI FJI VEČ SPREMENLJIVK

Naj: $D^{odp} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f: D \to \mathbb{R}$ zvezno parc. odv.
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$

Naj $(a_1, \dots, a_n) \in D$ taka, da $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ in $f_{x_n}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Tedaj $\exists!$ zvezno parc. odv. fja $h: U \to \mathbb{R}$ $\ni$:
↳ okolica $(a_1, \dots, a_{n-1})$

$h(a_1, \dots, a_{n-1}) = a_n$ in

$f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(a_1, \dots, a_{n-1})) = 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$

na kratko: izrek pove, kdaj lahko iz $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ izrazimo x_n kot fjo ostalih spremenljivk.

N: ali enačba $x^3 + 3y^2 + 4xz^2 - 3z^2y - 1 = 0$ implicitno določa takšno fjo $z(x,y)$:
a.) v okolici $(1,1)$
b.) v okolici $(1,0)$
c.) v okolici $(\frac{1}{2}, 0)$

a.) $3 + 4z^2 - 3z^2 = 0$ $\qquad$ $3 + z^2 = 0$

$z^2 = -3$

$z = i\sqrt{3} \notin \mathbb{R}$

b.) $4z^2 = 0$ $\qquad$ $(1,0,0)$ zadošča enačbi

$z = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 8xz - 6zy = 0$

$f_z(1,0,0) = 0$

izreka o implicitni fji ne moremo uporabiti

c.) $\frac{1}{8} + 2z^2 - 1 = 0$

$2z^2 = \frac{7}{8}$

$z^2 = \frac{7}{16}$

$z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\to (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{7}}{4})$

$(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{7}}{4})$

$f_z = 8xz - 6yz = \pm\sqrt{7} \neq 0$ ✓

obs~~t~~tajata okolici $(\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{7}}{4})$, da obstajata fji $\check{z}(x,y)$ in $\hat{z}(x,y)$, da je

(z okolici!)

$\check{z}(\frac{1}{2}, 0) = \frac{-\sqrt{7}}{4}$

$\hat{z}(\frac{1}{2}, 0) = \frac{\sqrt{7}}{4}$ in

$f(x, y, \check{\hat{z}}(x,y)) = 0 \quad \forall x, y$ iz okolic