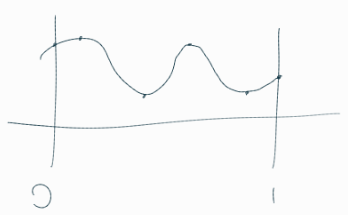
LOKALNI EKSTREMI fj DVEH SPREMENLJIVK

Kaj se dogaja pri fjah ene spremenljivke?

↳ odvedljiva $f: [0,1] \to \mathbb{R}$



$f'(x) = 0$ in krajišča intervala so kandidati za lokalne ekstreme.

Kdaj fih lahko razumemo z odvodom?
ko je f odvedljiva in def. na odprti množici

$\Downarrow$

Podobno velja tudi pri fjah dveh ali več spremenljivk.

(1.) Naj $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta množica in $f: D \to \mathbb{R}$

(i.) kandidati za lok. ekstr. so točke:

- kjer f ni parcialno odvedljiva
- točke a, kjer je $f_x(a) = 0$ in $f_y(a) = 0$

↳ dobimo stacionarne točke.

(ii.) Za vsako stac. točko preverimo, ali je lok. min, lok. maks. ali sedlo. Uporabimo kriterij s hessejevo matriko, če je f zvezno parcialno odvedljiva dvakrat:

$$H_a = \begin{bmatrix} f_{xx}a & f_{xy}a \\ f_{yx}a & f_{yy}a \end{bmatrix}$$

$\det H_a < 0$
$\downarrow$
a je sedlo

$\det H_a > 0$
$\swarrow$ $\searrow$
$f_{xx}a > 0$ lok. min
$f_{xx}a < 0$ lok. maks

$\det H_a = 0$
↳ treba je gledati višje odvode

N

Določi stac. točke fje $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 3)e^x$ in v vsaki stac. točki določi tip ekstrema.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in C^\infty$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^x + (x^2 + y^2 - 3)e^x = e^x(2x + x^2 + y^2 - 3) = 0$$

$e^x \neq 0$

$2x + x^2 + y^2 - 3 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y e^x$$

↳ $y = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x-1)(x+3) = 0$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -3$

stac. točke: $T_1(1,0)$ $T_2(-3,0)$

$$f_{xx}(x,y) = \dots = e^{x}(x^2+y^2+4x-1)$$
$$f_{yy}(x,y) = 2e^{x}$$
$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 2ye^{x}$$

$$H(1,0) = \begin{bmatrix} 4e & 0 \\ 0 & 2e \end{bmatrix} \qquad |H(1,0)| = 8e^2 > 0$$

$\hookrightarrow$ $4e > 0$ lok. min.

$$H(-3,0) = \begin{bmatrix} -4e^{-3} & 0 \\ 0 & 2e^{-3} \end{bmatrix}$$

$|H(-3,0)| = -8e^{-3} < 0$

$\hookrightarrow$ je sedlo.

N

$$f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y = 8x^{-1} + xy^{-1} + y$$

Reš: Def. območje = ?

$$f_x(x,y) = -8x^{-2} + y^{-1} \qquad x^2 = 8y$$
$$f_y(x,y) = -xy^{-2} + 1 \qquad -xy^{-2} = -1$$
$$xy^{-2} = 1$$
$$x = y^2$$

$$f_{xx}^{(4,4)} = 16x^{-3}$$
$$f_{xy}^{(4,4)} = -y^{-2}$$
$$f_{yy}^{(4,4)} = 2xy^{-3}$$

$$y^4 = 8y$$
$$y^4 - 8y = 0$$
$$y(y^3-8) = 0$$
$$y^3 = 8$$

$y = 2 \Rightarrow x = 4$

$\underline{T(4,2)}$ st. tč.

$$H(4,2) = \begin{bmatrix} \frac{16}{64} = \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 8 \cdot \frac{1}{8} = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$|H(4,2)| = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0$$

$\hookrightarrow$ lokalni ekstrem

$\hookrightarrow$ $\frac{1}{4} > 0$

$\hookrightarrow$ lok. min.

---

opomba: $\det H < 0$

$\hookrightarrow$ sedlo

$\det H > 0$ — $f_{xx} > 0$ lmin

$\hookrightarrow$ $f_{xx} < 0$ lmax

$\det H = 0 \rightarrow$ ne moremo določiti

TAYLORJEVA VRSTA ZA FJO DVEH SPREMENLJIVK

$f(x,y)$, (a,b) let f vestokrat zvezno

parcialno odvedljiva na okolici (a,b)

$f(x,y)$ priredimo taylorjev polinom okoli (a,b)

reda n:

$$T_{f,(a,b),n}(x) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right)$$
$$+ \dots + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\frac{\partial f}{\partial x^{n-k}\partial y^{k}}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^{k}$$

razvoj fje f reda n okoli točke (a,b)

N: Razvij fjo $f(x,y) = (x^2+x+1)\sin y + e^x$ v Taylorjev polinom reda 3 okoli $(0,0)$.

$f_x^{(x,y)} = (2x+1)\sin y + e^x$ $\qquad f_y^{(x,y)} = (x^2+x+1)\cos y$

$f_{yx} = (2x+1)\cos y = f_{xy} = (2x+1)\cos y$

$f_{xx} = 2\sin y + e^x$ $\qquad f_{yy} = -(x^2+x+1)\sin y$

$f_{xxy} = 2\cos y$ $\qquad f_{yyx} = -(2x+1)\sin y$

$f_{xxx} = e^x$ $\qquad f_{yyy} = -(x^2+x+1)\cos y$

$f(0,0)=1$ $\quad f_x(0,0)=1$ $\quad f_y(0,0)=1$ $\quad f_{xx}(0,0)=1$

$f_{yy}(0,0)=0$ $\quad f_{xy}(0,0)=1$ $\quad f_{xxx}(0,0)=1$ $\quad f_{yyy}(0,0)=-1$

$f_{xxy}(0,0)=2$ $\quad f_{yyx}(0,0)=0$

$$T_{f,(0,0),3}(x) = 1 + x + y + \frac{1}{2}\left(1x^2 + 2xy + 0y^2\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\left(x^3 + 3\cdot 2x^2y + 0 - y^3\right) =$$

$$= 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{6}x^3 + x^2y - \frac{1}{6}y^3 \approx f(x,y)$$

za (x,y) blizu $(0,0)$.

bolj enostaven pristop do rešitve:

$$f(x,y) = (x^2+x+1)\left(y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + \dots\right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\right) =$$

$$= 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{x^3}{6} + x^2y - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

OPOMBA: $f(x,y)$ i (a,b) je stac. tč. f.je f

Razvoj f.je f reda 2 okoli (a,b) ⟶ $f_x(a,b)=0 \quad f_y(a,b)=0$

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right)$$

$$= f(a,b) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-a & a-b \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix}}_{\text{hessejeva matrika}} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad f(a+h) \approx f(a) + \frac{1}{2} h^T H(a) \cdot h$$

če sta obe lastni vrednosti strogo pozitivni, je $h^T H a h > 0$ $\Rightarrow$ v a je lok. min.

če sta obe lastni vrednosti strogo negativni, je $h^T H a h < 0$ $\Rightarrow$ v a je lok. maks.

za vse male h-je

če je λ_1 negativna, λ_2 pa pozitivna, je

$h_1^T H a h_1 < 0$ in $h_2^T H a h_2 > 0$ (sedlo)

za h_1 lastni vektor λ_1 in h_2 lastni vektor λ_2

N

Vrvico dolžine l razrežemo na 3 dele dolžine, večje od 0. Iz prvega naredimo krožnico, iz drugega kvadrat, iz tretjega pa enakostranični 3kotnik. Najdi razrez, da je skupna ploščina čim manjša

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \pi + \left(\frac{l-y-x}{4}\right)^2 + \frac{\left(\frac{y}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} =$$

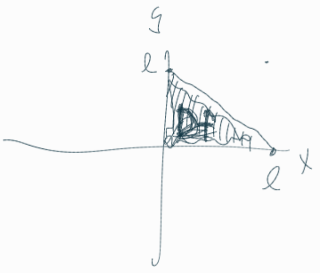
$$= \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{l-y-x}{4}\right)^2 + \frac{\left(\frac{y}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-y-x)^2}{16} + \frac{y^2\sqrt{3}}{36} =$$

$$f_x(x,y) = \frac{x}{2\pi} - \frac{(l-y-x)}{8} = \frac{lx - 2\pi(l-y-x)}{16\pi}$$

$$f_y(x,y) = \frac{-(l-y-x)}{8} + \frac{y\sqrt{3}}{18} =$$

$$= \frac{8y\sqrt{3} - 18(l-y-x)}{8 \cdot 18}$$



definicijski pogoji:

$0 < x < l$

$0 < y < l$

$l - x - y > 0$

$\Leftrightarrow y < l - x$

$$8x - 2\pi(l-y-x) = 8x - 2\pi l + 2\pi y + 2\pi x = 0$$

$$x = \frac{2\pi(l-y)}{2\pi+8} = \frac{\pi(l-y)}{\pi+4}$$

$$8y\sqrt{3} - 18(l-y-x) = 0$$

$$4y\sqrt{3} - 9(l-y-x) = 0$$

$$4y\sqrt{3} - 9\left(l - y - \frac{\pi(l-y)}{\pi+4}\right) = 0$$

$$4y\sqrt{3} - 9l + 9y + \frac{9\pi(l-y)}{\pi+4} = 0$$

$$(4\sqrt{3}+9)y - 9l + \frac{9\pi l}{\pi+4} - \frac{9\pi y}{\pi+4} = 0$$

$$4\sqrt{3}y + 9y - 9l + \frac{9\pi l}{\pi+4} - \frac{9\pi y}{\pi+4} = 0$$

$$\left(4\sqrt{3} + 9 - \frac{9\pi}{\pi+4}\right)y + \left(\frac{9\pi}{\pi+4} - 9\right)l = 0$$

$$y = \frac{\left(9 - \frac{9\pi}{\pi+4}\right)l}{4\sqrt{3} + 9 - \frac{9\pi}{\pi+4}} =$$

$$= \frac{9\left(1 - \frac{\pi}{\pi+4}\right)l}{9\left(1 - \frac{\pi}{\pi+4}\right) + 4\sqrt{3}} = y$$

NAROBE ......

N

Dana je tč. $T(1,1,1)$ in ravnina π z enačbo $x+2y+3z=1$

Določi točko na π, ki je najbližje T.

normala ravnine je $(1,2,3)$

rešimo na način, kjer bomo potrebovali parc. odvode.

$$T_2(1-2y-3z,\ y,\ z)$$

$$d(x,y) = \sqrt{(2y-3z)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

↳ razdalja med $T(1,1,1)$ in T_2. najdi njen minimum.

lahko iščemo minimum fje f, saj je $\sqrt{\ }$ monotona

$$f(y,z) = (2y-3z)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$f(y,z) = 4y^2 - 12yz + 9z^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 =$$

$$= 5y^2 - 12yz + 10z^2 - 2y - 2z + 2$$

$f_y(y,z) = 10y - 12z - 2$ $\quad 10y = 12z + 2 \quad y = \frac{6z+1}{5}$

$f_z(y,z) = -12y + 20z - 2$ $\quad -12y = 2 - 20z \quad y = \frac{10z-1}{6}$

$$\frac{6z+1}{5} = \frac{10z-1}{6} \qquad 5(10z-1) = 6(6z+1)$$

(narobe?)

...