... nadaljevanje reševanja dif. en. višjih redov:

2.) Če se v diferencialni enačbi spremenljivka x ne pojavi, vpeljemo novo neodvisno spremenljivko y in za novo odvisno spremenljivko vzamemo $z(y) = y'$ odvod po x, stavi neodv. spr.

Primer:

$$2yy' - y'' = 0$$

$y \quad z$

$$y'' = \frac{d^2y}{(dx)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(z) =$$

$$= \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$$

$$2yz - z'z = 0$$

enačbi smo znižali red.

$$z(2y - z') = 0$$

case $z \equiv 0$ konstantna fja

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \equiv 0$ konst. $\Rightarrow y = C$ za neki $C \in \mathbb{R}$

case $2y - z' \equiv 0$ konst.

$$z' = 2y$$

$$\frac{dz}{dy} = 2y$$

$$\int dz = \int 2y \, dy$$

$$z = y^2 + D, \quad D \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + D \quad \Big\} \text{ Bernoullijeva}$$

$$\frac{dy}{y^2+D} = dx$$

$$\int \frac{1}{D\left(\frac{y^2}{\sqrt{D}^2}+1\right)}\,dy = \int \frac{1}{y^2+D}\,dy = \int 1\,dx = x$$

$$\| $$

$$\int \frac{1}{D\left(\left(\frac{y}{\sqrt{D}}\right)^2+1\right)}\,dy = \frac{1}{D}\int \frac{\sqrt{D}}{u^2+1}\,du = \frac{1}{\sqrt{D}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du =$$

$u = \frac{y}{\sqrt{D}}$

$du = \frac{dy}{\sqrt{D}}$

$dy = \sqrt{D}\,du$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}}\arctan u + F =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{D}}\right) + F =$$

$$= x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y}{\sqrt{D}} = \tan\left((x+G)\sqrt{D}\right)$$

LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE VIŠJEGA REDA ~ LDEVR ~ red ≥ 1

Def.: LDE n-tega reda je oblike:

$$r_n(x)\,y^{(n)}(x) + r_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + r_0(x)\,y(x) = s(x)$$

kjer so $r_n, \dots, r_0, s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dane funkcije.

Če je s ničelna fja, je enačba homogena, sicer je nehomogena.

Če so $r_0, \dots, r_n$ konstante, gre za LDEVR s konst. koef.

Trditev: 1.) Naj bosta g_1 in g_2 rešitvi homogene LDEVR in $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Potem je tudi $C_1 g_1 + C_2 g_2$ (*) rešitev te HLDEVR.

Torej je množica rešitev vektorski prostor, g_1, g_2 vektorja, C_1, C_2 skalarja. Izkaže se, da je to n-razsežnostni vektorski prostor.

n krat odvedljive fje

2.) Naj bo fja h rešitev LDEVR in fja g rešitev partikularna PHLDEVR. Potem je h+g rešitev LDEVR.

3.) Splošna rešitev LDE je

$$y_s = y_h + y_g$$

splošna od PHLDEVR: linearna kombinacija n linearno neodvisnih rešitev (*)

partikularna

Dokaz podoben kot za LDEPR.

Primer: Reši DE! $x^2 y'' - 2y = 2$ to je LDE 2R, nehomogena

PHLDE2R: $x^2 y'' - 2y = 0$

1.) uganemo eno neničelno rešitev:

$$g_1(x) = x^2: \quad x^2 2 - 2x^2 = 0 \checkmark$$

2.) nastavek za drugo rešitev:

$$y(x) = u(x) \cdot g_1(x)$$ vstavi v DE; rabimo y' in y''

$$y'(x) = 2xu + x^2 u'$$
$$y''(x) = 2u + 2xu' + 2xu' + x^2 u'' =$$
$$= 2u + 4xu' + x^2 u''$$

$$x^2 (2u + 4xu' + x^2 u'') - 2ux^2 = 0$$

vedno se takole krajša $\cancel{2ux^2} + 4x^3 u' + x^4 u'' - \cancel{2x^2 u} = 0$

$$4x^3 u' + x^4 u'' = 0$$

Vzemimo $z = u'$: znižamo red, vedno to nastavek omogoča.

DOBILI SMO HLDE PR $\leftarrow$ $4x^3 z + x^4 z' = 0$

z LOČLJIVIMI
SPREMENLJIVKAMI

↳ rešimo: $4x^3 z + x^4 z' = 0$

$$\|$$

$$(x^4 \cdot z)' = 0$$

$$x^4 z = C$$

$$u' = z = C x^{-4}$$

$$u = D x^{-3} + E$$

vstavimo v y:

$$y(x) = (Dx^{-3} + E)(x^2) = \frac{D}{x} + E x^2$$

$$y_{splošna}(x) = \frac{D}{x} + E x^2$$

↳ PHLDEVR

potrebujemo še partikularno rešitev:

uganemo: $y_p = -1$

→ splošna rešitev: $y_{splošna}: -1 + \frac{D}{x} + E x^2$

Trditev: fja $g(x) = e^{\lambda_0 x}$ je rešitev HLDEVR s konstantnimi koeficienti:

$$r_n y^{(n)} + r_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + r_1 y' + r_0 y = 0$$

$r_n, \dots, r_n \in \mathbb{R}$, številske konstante.

natanko tedaj, ko je λ_0 ničla karakterističnega polinoma

$$p(\lambda) = r_n \lambda^n + r_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + r_1 \lambda + r_0 = 0$$

Dokaz: $g^{(k)}(x) = \lambda_0^k e^{\lambda_0 x}$ je rešitev $\Leftrightarrow$

$$r_n \lambda_0^n e^{\lambda_0 x} + r_{n-1} \lambda_0^{n-1} e^{\lambda_0 x} + \dots + r_1 \lambda_0 e^{\lambda_0 x} + r_0 e^{\lambda_0 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow p(\lambda_0) = 0$$

Primer HLOEZRSKE:

1.) $y'' + 2y' - 3y = 0$

$y(x) = e^{\lambda_0 x}$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda-1)(\lambda+3)$

ničle: $\{1, -3\}$

$\Downarrow$

splošna rešitev je $y_H = Ae^{x} + Be^{-3x}$, $A, B \in \mathbb{R}$

2.) $y'' + 2y' + 2y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$D = \sqrt{4 - 8} = -4$

ničle: $\dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

$y_{spl.} = Ae^{(-1+i)x} + Be^{(-1-i)x} = \dots \quad \forall A, B \in \mathbb{C}$

toda iščemo le realne rešitve:

$\dots = Ae^{-x}(\cos x + i\sin x) + Be^{-x}(\cos x - i\sin x) =$

$= \underbrace{(A+B)}_{C}e^{-x}\cos x + \underbrace{(iA - iB)}_{D}e^{-x}\sin x$

Želimo realna C, D:

$A = F + iE$

$B = F - iE$

V splošnem: če je $\lambda_{1,2} = \underline{a} \pm \underline{b}i$, $b \neq 0$, dve kompl. ničli, do realne rešitve pridemo tako, da

$y = Ce^{ax}\cos(\underline{b}x) + De^{ax}\sin(\underline{b}x)$

Če en možen itd:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1.$$

spet, dobimo le eno rešitev. Toda tak nastavek nam da splošno: $y(x) = Ae^{-x} + B\underline{x}e^{-x}$

Za e^{-x} vemo, da je rešitev. Kaj pa xe^{-x}?:

$$y'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x})$$

$$y''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$$

vstavimo!

$$\underbrace{-\cancel{2e^{-x}} + xe^{-x}}_{y''} \underbrace{+\cancel{2e^{-x}} - 2xe^{-x}}_{y'} + \underbrace{xe^{-x}}_{y} =$$

$$= 2xe^{-x} - 2xe^{-x} = 0 \quad \checkmark$$

in to velja v splošnem. Pri višjih redih, ko dobimo same iste ničle, pač naredimo $y(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x} + Cx^2e^{\lambda x} + \ldots$

< /HLDEVRSKK> Kaj pa nehomogene LDEVRSKK?

Dana je nehomogena LDEVRSKK:

$$r_n y^{(n)} + r_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + r_1 y + r_0 = s$$

r_n so dana števila, s je dana fja.

Če je $s(x)$ ena od spodnjih oblik in je λ_0 ničla karakterističnega polinoma stopnje $\underline{k}$, potem

↳ seveda stopnja ničle

partikularno rešitev $h(x)$ iščemo z nastavkom glede na s:

$s(x)$	λ_0	$h(x)$
1. polinom stopnje m	0	$x^k \cdot$ (polinom stopnje m)
2. $e^{\alpha x}$	α	$x^k \cdot e^{\alpha x}$
3. $\sin(\beta x)$	$i\beta$	$x^k \cdot (d\cos(\beta x) + f\sin(\beta x))$
4. $\cos(\beta x)$	$i\beta$	$x^k \cdot (d\cos(\beta x) + f\sin(\beta x))$
5. $e^{\alpha x}\cdot$(polinom st. m)	α	$x^k \cdot$ (polinom stopnje m) $\cdot e^{\alpha x}$

k vzamemo od ničle iz stolpca lambda.

Primer: $y'' - 3y' + 2y = x + 1$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

ničle: $2, 1$

$$y_H = Ae^{x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

sedaj pa partikularna rešitev s tabelo:

glej vrstico 1 v tabeli:

nastavek: $h(x) = x^0$(polinom st. 1) $= ax + b$

vstavi nastavek v DE

$$y' = a \qquad y'' = 0$$

$$0 - 3a + 2ax + 2b = x + 1$$

x^1: $2a = 1$

x^0: $-3a + 2b = 1$

$2b = 5/2 \Rightarrow b = \frac{5}{4}$

splošna rešitev:

$$y_p = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

$$y_s = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + Ae^{x} + Be^{2x}$$

[SISTEMI dif. en.]

Rešujemo Cauchyjevo nalogo:

$y_1, y_2, \dots, y_n$ so neznane f/e spremenljivke x.

$f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ dane zvezne f/e n+1 sp., ki predstavljajo enačbe.

Rešujemo sistem n DE1R:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&\vdots \\
y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n)
\end{aligned}
$$

za vse x na dogovorjenem intervalu.

SISTEM LAHKO ZAPIŠEMO V VEKTORSKI OBLIKI

let $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ $\Rightarrow$ $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$

$\vec{y}' = (y_1', \dots, y_n')$

posplošitev DE1R: $y' = f(x, y)$

Naloga poda začetni pogoj:

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Navodilo Cauchyjeve naloge: iščemo rešitev sistema DE1R, ki ustreza začetnemu pogoju, ki določi natanko eno rešitev.

<u>Eksistenčni izrek</u>: let $\vec{f}$ zvezno diferenciabilna na $[a,b]\times\mathbb{R}^n$. $\vec{f}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$. Za vsak $\vec{y}_0\in\mathbb{R}^n$ obstaja natanko ena zvezno odvedljiva funkcija $\vec{y}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$, ki reši Cauchyjevo nalogo.

$$\vec{y}'(x)=\vec{f}(x,\vec{y}(x))\quad\forall x\in[a,b]$$

$$\vec{y}(a)=\vec{y}_0$$

Q: ~~zakaj natanko ena?~~ češ kaj če z integriranjem spravimo splošno rešitev v $f(x)+\underline{\sin(D)}$? ni injektivna

EDIT: nevermind, četudi ni injektivna, če vedno definira ob pogoju eno f-jo, ker je funkcija!

<u>Definicija</u>: let $A:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$ matrična funkcija. In let $\vec{b}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ vektorska f-ja.

Sistem
$$y'(x)=A(x)\cdot\vec{y}(x)+\vec{b}(x)$$
imenujemo SISTEM n LDE1R.

Opomba:
$$\underbrace{\vec{b}(x)=\begin{bmatrix}b_1(x)\\ b_2(x)\\ \vdots\\ b_n(x)\end{bmatrix}}_{\text{podana}}\qquad \underbrace{\vec{y}(x)=\begin{bmatrix}y_1(x)\\ \vdots\\ y_n(x)\end{bmatrix}}_{\text{iskana}}$$

$$A(x)=\begin{bmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \cdots & & & \vdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{bmatrix}$$

razpišimo: $\vec{y}'=\vec{A}(x)\vec{y}(x)+\vec{b}(x)$:

$$y_1'(x)=a_{11}(x)y_1(x)+\dots+a_{1n}(x)y_n(x)+b_1(x)$$
$$\dots$$
$$y_k'(x)=a_{k1}(x)y_1(x)+\dots+a_{kn}(x)y_n(x)+b_k(x)$$

Opomba: Povežimo zadnjo def. z eksistenčnim izrekom:
Ko so komponente A in $\bar{b}$ zvezno odvedljive,
so izpolnjeni pogoji eksistenčnega izreka $\Rightarrow$
za vsak začetni pogoj $\exists!$ rešitev.