Def: let $(P,Q): D^{\subset \mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ vektorsko polje. !!! BERIME

Če obstaja fja $u: D \to \mathbb{R}$, da je $\operatorname{grad} u = (P,Q)$, potem pravimo, da je (P,Q) potencialno vektorsko polje.

Poglej naprej na konec dokum.

OPOMBA: Če je vektorsko polje potencialno, potem:

$$\exists\, u: D \to \mathbb{R} \ \ni: u_x = P \text{ in } u_y = Q$$

diferencialna enačba $P\,dx + Q\,dy = 0$ se prepiše

v $u_x\,dx + u_y\,dy = 0$; torej $\underbrace{du}_{\text{totalni diferencial } u} = 0 \Rightarrow u = \text{konst}$

To pomeni: $u(x, y(x)) = c$ za ortogonalne trajektorije

Dobili smo 1. integral.

Def: Če je (P,Q) potencialno vektorsko polje, potem dif. en. $P\,dx + Q\,dy = 0$ imenujemo eksaktna dif. en.

Kako ugotoviti, a je neka dif. en. eksaktna?

↳ če je D konveksna množica, velja:

$$(P,Q) \text{ potencialno} \Leftrightarrow P_y = Q_x$$

$(\Longrightarrow)$: $\quad u_x = P \quad u_y = Q$ (dy, dx)

$$u_{xy} = P_y \quad u_{yx} = Q_x \Rightarrow P_y = Q_x$$

$(\Longleftarrow)$: Še ne znamo dokazati:

Primer: $\underbrace{(y^2 \cdot e^{xy^2} + 4x^3)}_{P}dx + \underbrace{(2xy \cdot e^{xy^2} - 3y^2)}_{Q}dy = 0$

$$P_y = 2ye^{xy^2} + y^2 e^{xy^2} 2yx$$
$$Q_x = 2ye^{xy^2} + 2xye^{xy^2}y^2$$

✓ eksaktna dif. en.

sedaj iščemo u, za katero velja $u_x = P$, $u_y = Q$.

$$u_x = y^2 e^{xy^2} + 4x^3$$

$$u = \int \left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right) dx = e^{xy^2} + x^4 + \underbrace{c(y)}$$

taka fja, da pri odvajanju po y dobimo tole.

Q

$$u_y = 2xye^{xy^2} - 3y^2 = 2xye^{xy^2} + c'(x)$$

$$c'(y) = -3y^2$$

$$c(y) = -y^3 + A$$

vstavi v u:

$$\underbrace{u(x,y) = e^{xy^2} + x^4 - y^3} + \cancel{A}$$

↳ ni treba pisati, saj je zaprvi integral f tudi g of prvi integral

DENIMO, da vektorsko polje (P, Q) ni potencialno $\Longleftrightarrow$ dif. en. $P\,dx + Q\,dy = 0$ ni eksaktna.

Če najdemo fjo $\mu = \mu(x,y)$, da je vekt. polje $(\mu P, \mu Q)$ potencialno, lahko enačbo rešimo. Tako fjo μ imenujemo integrirajoči množitelj.

TOREJ: Če vekt. polje ni potencialno, iščemo integrirajoči množitelj μ, da bo $(\mu P, \mu Q)$ potencialno, torej mora veljati $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$

(kont.)

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$$

Primer: $\underbrace{(xy^2-1)}_{P}dx - \underbrace{x^2y}_{Q}dy = 0$

$P_y = 2xy \neq Q_x = -2xy$

$\Rightarrow$ ni eksaktna dif. en.

Namig: obstaja integrirajoči množitelj $\mu(x) = \mu$

najdimo ga. velja:

$$(\mu P)_y = \underbrace{\cancel{\mu_y}}_{=0} P + \mu \cdot 2xy$$

0, ker je μ funkcija x

$$(\mu Q)_x = \mu'(-x^2y) + \mu(-2xy)$$

$$2xy\mu = \mu'(-x^2y) - 2xy\mu$$

$$4\mu = -x\mu'(x)$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{4}{-x}$$

$$\frac{d\mu}{\mu\, dx} = \frac{4}{-x}$$

$$\int \frac{1}{\mu}\, d\mu = \int \frac{4}{-x}\, dx$$

$$\ln|\mu| = -4\ln|x| + \ln C$$

$$\mu = 1/x^4$$

pomnoži P, Q z $1/x^4$:

$$\underbrace{(y^2 x^{-3} - x^{-4})}_{P'} dx - \underbrace{x^{-2} y}_{Q'} dy = 0$$

$P' = u_x$

$Q' = u_y$

$$u_y = -x^{-2} y$$

$$u = -\int x^{-2} y \, dy = -x^{-2} \frac{1}{2} y^2 + c(x)$$

$$u_x = x^{-3} y^2 + c'(x) = y^2 x^{-3} - x^{-4}$$

$$\Rightarrow c(x) = \frac{x^{-3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{-1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{3x^3} \quad \Big\} \text{ prvi integral}$$

UVOD V REŠEVANJE NAVADNIH DIFERENCIALNIH ENAČB VIŠJEGA REDA

1. primer: najnižji odvod, ki se v dif. en. pojavi, je reda k. Tedaj vpeljemo novo funkcijo $z = y^{(k)}$

zgled: $$y^{(4)} - y^{(3)} = 1$$

$$z := y^{(3)} \qquad z' = y^{(4)}:$$

$$z' - z = 1 \qquad \text{znana LDE.}$$

PHLDE: $z' - z = 0$; $z = Ae^x$

$z_p = -1$; $z_s = Ae^x - 1 = y_s^{(3)}$

$$y_s^{(2)} = \int Ae^x - 1 \, dx =$$

$$= -x + Ae^x + B$$

$$y_s^{(1)} = \int -x + Ae^x + B \, dx = -\frac{1}{2}x^2 + Ae^x + Bx + C$$

$$y_s = \int y_s^{(1)} \, dx = -\frac{1}{6}x^3 + Ae^x + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx + D.$$

!!! BERIME: Tu je le zadnja ura! Prvi dve sta v zvezku!