BINOMSKA VRSTA

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

f razvijemo v Taylorjevo vrsto s središčem v 0.

za $\alpha \in \mathbb{N}$: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n$

za $\alpha \notin \mathbb{N}$: $(1+x)^\alpha = e^{\ln(1+x)^\alpha} = e^{\alpha \ln(\underbrace{1+x}_{>0})}$

$D_f = (-1, \infty)$

priredimo $T_{f,0,n}(x)$ in dokažimo, da $R_{f,0,n}$ konvergira k 0

$f(x) = (1+x)^\alpha \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$

pripadajoča Taylorjeva vrsta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}}_{\binom{\alpha}{k}} x^k$$

$\binom{\alpha}{k}$ posplošeni binomski koeficient

se ujema za $\alpha \in \mathbb{N}$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$k \in \mathbb{N}_0$

in $\binom{\alpha}{0} = 1$

$\overset{?}{\underset{(*)}{=}} f(x) \quad ?$

x fiksiramo in $R_{f,n,0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

vzemimo $x \in (0,1)$

$R_{f,n,0}(x)$. Trdimo, da $\exists c$ med 0 in x $\ni$:

$$R_{f,n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\boxed{c_n})}{(n+1)!} x^{n+1} =$$

odvisen od n

$$= \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\boxed{n+1}-1)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\boxed{c_n})^{\alpha-n-1} \right| =$$

$$= \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+c_n)^{\alpha-n-1} \right|$$

$0 < c_n < x$

$\Rightarrow 1 < 1+c_n < 1+x$

$(1+c_n)^{\alpha} < \max\{(1+x)^{\alpha}, 1\} = M$

$\alpha > 0$ $\qquad \alpha < 0$

$(1+c_n)^{\alpha-n-1} \leq M$

$(1+c_n)^{\boxed{-n-1}} \leq 1$ $\quad < 0$

$\neq 0$, ker $\alpha \notin \mathbb{N}$.

$$\leq \underbrace{\left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} \right| x^{n+1} \cdot M}_{= a_n(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dokažimo, da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ konvergira.
uporabimo kvocientni kriterij za konvergenco vrste.
vrsta ima namreč strogo pozitivne člene.

$$d_n(x) = \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{|\cancel{\alpha(\alpha-1)\cdots}(\alpha-n-1)|\, x^{\cancel{n+2}}\, \cancel{M}\, \cancel{(n+1)!}}{(n+2)\cancel{!}\, |\cancel{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}|\, \cancel{x^{n+1}}\, \cancel{M}} =$$

$$= \frac{|\alpha-n-1|\, x}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{x} \rightarrow \text{vrsta konvergira za } x<1$$

divergira za $x>0$

torej enačaj (*) velja za

$x \in [0, 1)$.

dokazati se da še, da konvergira tudi na $(-1, 0)$.

↳ podobno.

[DIFERENCIALNE ENAČBE]

Uvod: znamo rešiti take enačbe:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 .$$

in tudi take, implicitno podane:

$$x^2 + 2y^2 = 1$$ (elipsa). iščemo neznano funkcijo $y = y(x)$, ki reši enačbo, kar je v okolici katere točke možno, v okolici katere pa ne.

in tudi sisteme linearnih enačb:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Če v enačbi poleg neznane fje nastopajo tudi njeni odvodi, jo imenujemo diferencialna enačba.

Primeri: 1.) $y' = y \quad \sim \quad y'(x) = y(x)$

2.) $y' = x^2 + 3x \quad \sim \quad y'(x) = x^2 + 3x$

3.) $x^2 + (y')^2 = 6 \quad \sim \quad x^2 + (y'(x))^2 = 6$

4.) $\left.\begin{aligned} y' &= 2y + 3z \\ z' &= y - 2z \end{aligned}\right\}$ sistem, iščemo $y(x)$ in $z(z)$

$$\sim \quad y'(x) = 2y(x) + 3z(x)$$
$$z'(x) = y(x) + 2z(x)$$

↳ argumente izpuščamo.

</Diferencialne enačbe 1. reda (odvodi 1. reda)>

Diferencialna enačba drugega reda (odvodi 2. reda):

5.) $y'' = 3y' + 6y = \sin x$

TAKIH pa ne bomo obravnavali:

6.) $u = u(x,y) \quad \exists: \; u_{xx} + u_{yy} = 0$ (parcialna diferencialna enačba 2. reda)

<u>Definicija</u>: Enačbam, v katerih poleg neznane fje ene spremenljivke nastopajo še njeni odvodi, pravimo <u>navadne diferencialne enačbe</u>.

Opomba: Navadna diferencialna enačba je oblike:

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, kjer je

F fja $n+2$ spremenljivk.

<u>Definicija</u>: Red diferencialne enačbe je stopnja najvišjega odvoda, ki v diferencialni enačbi nastopa.

Rešitev dif. en. $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ je n-krat odvedljiva funkcija $y(x)$ na intervalu I, za katero velja

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{za vse } x \in I.$$

Rešiti enačbo pomeni najti vse njene rešitve.

Primer: Reši dif. en.: $y' = 0$

Rešitve: $\{ y(x) = c \; ; \; c \in \mathbb{R} \}$

Reši dif. en.: $y'(x) = f(x)$

$$y'(x) - f(x) = 0$$

Rešitve: $y(x) = \underbrace{\int f(x)\,dx}$

množica / družina funkcij, ki se razlikujejo za konst.

Reši d.e.: $y'' = 0$

$$\{ y' = c \; ; \; c \in \mathbb{R} \}$$

Rešitve: $\{ y = cx + d \; ; \; c, d \in \mathbb{R} \}$

PREIZKUS z odvajanjem:

Reši d.e.: $y' = y$

UGANEMO: Rešitve: $\{ y = c \cdot e^x \; ; \; c \in \mathbb{R} \}$

Reši dif. enačbo: $xy' + y = 0$

UČITELJ pove nekaj rešitev:

$$\{ y(x) = \frac{c}{x} \; ; \; c \in \mathbb{R} \}$$

$$y' = \frac{-y}{x}$$

Preizkus:

$$y'(x) = \frac{-c}{x^2}$$

$$x \cdot \frac{-c}{x^2} + \frac{c}{x} = 0$$

$$\frac{-c}{x} + \frac{c}{x} = 0 \quad \checkmark$$

Definicijsko območje: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

zato je rešitev tudi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \; ; & x > 0 \\ \frac{4}{x} \; ; & x < 0 \end{cases}$$

Opazimo: V rešitvi d.e. 1. reda nastopa 1 prost parameter.

V rešitvi d.e. 2. reda nastopata 2 prosta parametra.

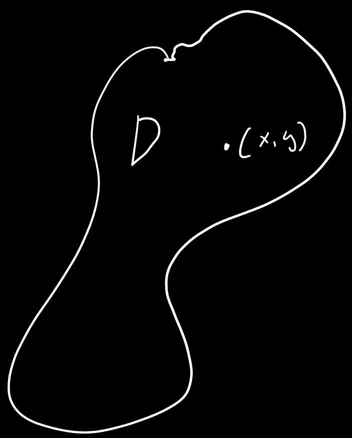
V rešitvi d.e. n. reda nastopa n prostih parametrov.

↳ pri vsaki integraciji se pojavi nov prost parameter.

[GEOMETRIJSKI POMEN DIFERENCIALNIH ENAČB PRVEGA REDA]

Let $y' = f(x,y)$ d.e. 1. reda v eksplicitni obliki.

Označimo z $D := D_f \subseteq \mathbb{R}^2$.



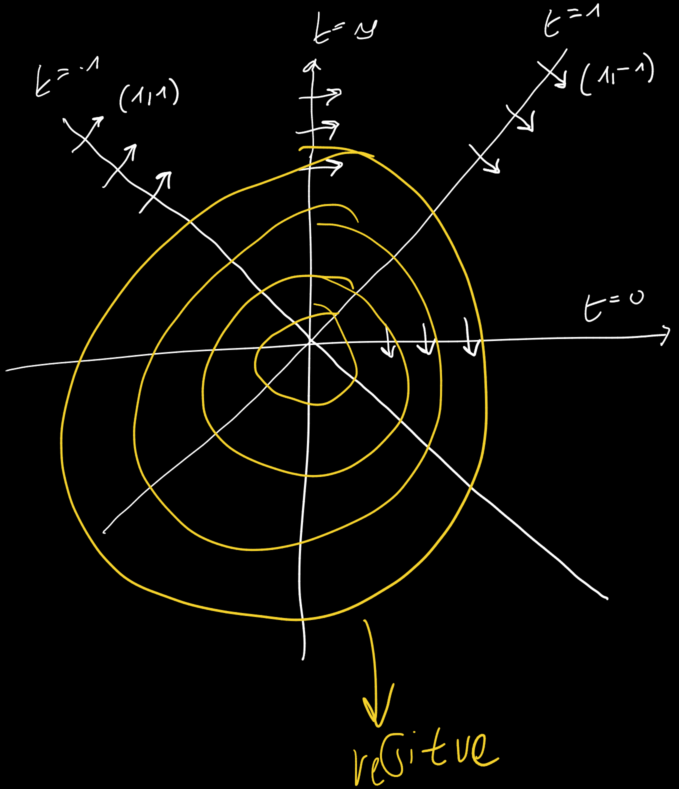
za rešitev v (x,y) bi veljalo $y'(x) = f(x, y(x))$

enačba $y' = f(x,y)$ predstavlja zvezo med $(x,y) \in D$ in odvodom rešitve $y = y(x)$ skozi to točko: v točki $(x, y(x))$ ima rešitev odvod $y'(x) = f(x, y(x))$.

Torej je s f tangenta na rešitev natanko določena. Fja f določa vektorsko polje ($D \to \mathbb{R}^2$) s predpisom $(x,y) \to (1, y') = (1, f(x,y))$

Rešitev d.e. $y' = f(x,y)$ je vsaka fja, katere graf je tangenten na vektorsko polje v vsaki točki.

Primer: $y' = \frac{-x}{y}$ $\quad f(x,y) = \frac{-x}{y}$



gledamo izohipse od f, točke, kjer $f(x,y) = const$, t.j. točke, kjer

$$y = -\frac{1}{t} x$$

$\{(x,y) ; f(x,y) = t\} =$

$\{(x,y) ; \frac{-x}{y} = t\}$

$$\{x^2 + y^2 = r^2 ; r \in \mathbb{R}\}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad /'$$

$$2x + 2yy' = 0$$

Reševanje dif. en.:

— dif. en. z ločljivima spremenljivkama

- $y' = \frac{f(x)}{g(y)} \iff y' g(y) = f(x)$

način reševanja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

(**) $\quad g(y)\,dy = f(x)\,dx \quad /\int$

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

$$G(y) = G(x)$$

in dobimo rešitev za y v implicitni obliki.

rešujemo $g(y)\, y' = f(x)$

let G primitivna fja g $\iff$ $G' = g$

in F p. fja f. $F' = f$

Recimo, da je $y = y(x)$ rešitev dif. e.

$$g(y(x))\, y'(x) = f(x)$$

$$G'(y(x))\, y'(x) = F'(x)$$

odvod sest. fje

$$\left(G(y(x))\right)' = F'(x) \quad / \int$$

$$G(y(x)) = F(x) + c \quad \text{za neki } c \in \mathbb{R}$$

Izpeljali smo: Če je y rešitev, potem velja $G(y(x)) = F(x) + c$

Če $y(x)$ izpolnjuje enačbo $G(y(x)) = F(x) + c$, kjer sta G in F p. fji za g in f, velja

$$G(y(x)) = F(x) + c \quad /'$$

$$G'(y(x))\, y'(x) = F'(x)$$

$$g(y(x))\, y'(x) = f(x)$$

torej je y rešitev te enačbe.

s tem smo dokazali (**)

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$$

, p, q polinoma.

stopnja p mora biti $<$ stopnja q, sicer delimo

Razcep q

$$a_0 (x - c_1)^{\alpha_1} \cdots (x - c_n)^{\alpha_n} \underbrace{(x^2 + b_1 x + d_1)}_{\text{nerazcepen} - D < 0}^{\beta_1} \cdots$$

||

$$\int \frac{p^x}{q^x}\,dx = A_1 \ln|x-c_1| + \dots + A_n \ln|x-c_n|$$
$$+ B_1 \ln|x^2+b_1x+d_1| + \dots +$$
$$C_1 \arctan \frac{2x+b_1}{\sqrt{-D}} + C +$$

če so tatšne $\alpha_i > 1$ še tole:

$$+ \frac{\text{polinom nižje stopnje od imenovalca}}{(x-c_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (x^2+b_1x+d_1)^{\beta_1 - 1}}$$

s koef. A_i

nato odvod dobljenega nastavka enačimo s $\frac{p(x)}{q(x)}$ in rešimo dobljen sistem linearnih enačb, da dobimo A_i.

primer: $y' = -\frac{x}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$ → rešitve so krožnice.

2.) $y' = ty \quad t \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = ty$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int t\,dx$$

$$\ln|y| = kx + c$$
$$|y| = e^{kx} + c$$
$$y = A e^{kx}, \quad A \in \mathbb{R}$$

splošna rešitev: $\{ y = A e^{kx} \,;\, A \in \mathbb{R} \}$

$\hookrightarrow$ množica vseh rešitev

Uporaba: (v biologiji)

t je čas

$y(t)$ velikost populacije v času t

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

$\hookrightarrow$ hitrost spreminjanja populacije $\sim y'(t)$

1.) Rast je premo sorazmerna njeni velikosti

$\hookrightarrow$ $f(t, y(t)) = k \cdot y(t)$

$\Rightarrow y(t) = A e^{kt}$

$\hookrightarrow$ $y(0) = A$, velikost populacije na začetku

2.) Dokler je populacija majhna, je rast sorazmerna z velikostjo, ko pa je populacija velika, se rast ustavi.

Primer modela:

$$y' = ky(N - y)$$

tej enačbi pravimo logistična enačba.

in je d.e. z loč. spr.

$$\int \frac{1}{y(N-y)}\, dy = k \int dx$$

$$\int \frac{1}{y(N-y)}\,dy = a\ln|y| + b\ln|N-y| + C$$

$$\frac{1}{y(N-y)} = \frac{a}{y} - \frac{b}{N-y} = \frac{a(N-y) - by}{y(N-y)}$$

...

$$y = \frac{NAe^{Nkt}}{1 + Ae^{Nkt}} = \frac{N}{1 + A^{-1}e^{-Nkt}}$$

graf: