ODVAJANJE IN INTEGRIRANJE POTENČNIH VRST

Let $R>0$ konv. polmer vrste $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, enga $\exists$ okolica $(a-R, a+R)$, na katerem vrsta konvergira in $\exists$ množica $\mathbb{R} \setminus [a-R, a+R]$, na katerem divergira.

Vsota je zvezna na celem odprtem intervalu (od prej).

Vrsti, ki ju dobimo z odvajanjem / integriranjem po členih imata konvergenčni polmer R in velja $*$ tev

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

velja

$$\frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\left(c_n (x-a)^n\right)}{dx}$$

$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^n\right) dt \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x c_n (t-a)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}, \quad \forall x \in (a-R, a+R)$$

Torej je vsota potenčne vrste $\in C^{\infty}((a-R, a+R))$.

<u>Dokaz:</u> sklicujemo se na Cauchy-Hadamarda:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Po predpostavki $R \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{R} \in \mathbb{R}$

Po C.H. izračunamo konv. polmer odvajane in integr. vrste.

$$\frac{1}{R'} = \limsup \sqrt[n]{|n c_n|} = \limsup \cancel{\sqrt[n]{n}}^{\,1} \sqrt[n]{|c_n|} =$$

po odvajanju $= \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ pred odvajanjem

Podobno za integrirano vrsto.

Sedaj dokažimo še, da lahko zamenjamo Σ in $\int$.
Od prej vemo, da lahko ob enakomerni konvergenci to počnemo.

$\forall x \in (a-R, a+R)$: na $[-|x|, |x|]$ je fiksna vrsta enakomerno konvergentna, torej je zamenjava mogoča.

menjava odvajanja in vsote:

Iz splošnega izreka o menjavi Σ in odvoda sledi dokaz.

Primeri:

1. seštej vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

velja le, kadar smo na konverg. območju.

$R = 1$,

$\Rightarrow$ velja za $|x|<1$

geometrijska vrsta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = \frac{a}{1-q}$$

konvergira za $|q|<1$

za $|x|<1$

torej ima tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $R=1$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| + C = -\ln(1-x) + C$$

pozitivno

določi C:

seštejmo vrsto v eni točki:

$$f(0) = 0 = -\ln(1-x) + c$$
$$\ln(1-0) = c$$
$$c = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -\ln(1-x)$$

Kaj se dogaja v krajiščih $(-1, 1)$:

$x = -1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}}$$

alt. harm. vrsta

↳ pogojna konvergenca,

↳ konvergenca, a ne absolutna.

$x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergira}$$

Abelov izrek (ponovitev):

če vrsta konvergira v krajišču, je f zvezna funkcija tudi v tem krajišču.

V našem primeru je f zvezna na $[-1, 1)$.

torej $f(-1) = \lim_{x \downarrow -1} -\ln(x-1) = -\ln(2)$

torej $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots = -\ln 2$$

2. seštej $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)(x-1)^{n-1} =$

$$= (x-1)\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}}$$

↳ integriraj

zamenjamo lahko tam, kjer vrsta konvergira

var. x

središče 1

$$\int_1^x \sum_{n=1}^{\infty} n(t-1)^{n-1}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^x n(t-1)^{n-1}\, dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{n} \frac{(t-1)^n}{\cancel{n}} \Big|_1^x = \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n - \cancel{(1-1)^n} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n}$$

geom. vrsta, $q = x - 1$, $|x-1| < 1$, $x \in (0, 2)$, $R = 1$

$$= \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x}$$

Po osnovnem izreku analize

$$\left(\int_a^x g\,t\,dt\right)' = g\,x$$

$$\frac{d\left(\frac{x-1}{2-x}\right)}{dx}$$

torej $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n =$

$$= (x-1)\cdot\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$$

[TAYLORJEVA VRSTA]

let f n-krat odvedljiva v okolici točke a. tak fj priredimo n-ti taylorjev polinom s središčem v a:

$$T_{f,a,n}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

opomba: Če je f polinom stopnje $\leq n$, potem je $T_{f,a,n}(x) = f(x) \Leftrightarrow$ imata iste koeficiente.

$$T_{f,a,n}(a) = f(a)$$

$$\left(T_{f,a,n}(x)\right)'(a) = f'(a)$$

$$\left(T_{f,a,n}(x)\right)''(a) = f''(a)$$

$$\left(T_{f,a,n}(x)\right)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

členi višje stopnje imajo $(x-a)=0$, člene nižje stopnje pa z odvodom ubijemo.

zat polinom stopnje n je $T_{f,a,n}^{(k)}(x) = 0$, če $k > n$

$$\frac{d^k\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)}{(dx)^k} =$$

$$= \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,k!\cdot 1 = f^{(k)}(a)$$

Če f ni polinom:

$$f(x) = \underbrace{T_{f,a,n}(x)}_{\text{n-ti taylorjev polinom}} + \underbrace{R_{f,a,n}(x)}_{\text{ostanek}}$$

Taylorjev izrek: let I odprt interval, $a \in I$, $f \in C^{n+1}(I)$. $\Rightarrow \forall x \in I \ \forall p \in \mathbb{N} \ \exists c$ med a in x

$\ni$: $$R_{f,a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p n!}(x-a)^p (x-a)^{n-p+1}$$

Če vstavimo $p = n+1$:

$$R_{f,a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\, n!}(x-a)^{n+1} \cancel{(x-a)}^{0} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ni središče, temveč neka vmesna točka.

Dokaz: $x, b \in I$, $p \in \mathbb{N}$

$$F(x) = T_{f,x,n}(b) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p \cdot R_{f,a,n}(b)$$

$$F(a) = T_{f,a,n}(b) + R_{f,a,n}(b) = f(b)$$

$$F(b) = T_{f,b,n}(b) + 0 = f(b)$$

$(b-b)$ v vseh členih

$$F(x) = f(x) + f'(x)(b-x) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + \underbrace{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p \cdot R_{f,a,n}(b)}_{\text{polinom, je}}$$

je

a je zvezno odvedljiva?

LAHKO UPORABIMO ROLLEOV IZREK.

$\exists c$ med a in b $\ni$: $F'(c) = 0$

$$F'(x) = \cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)} + \cancel{f''(x)(b-x)} - \cancel{f''(x)(b-x)} + \cancel{f'''(x)\frac{(b-x)^2}{2}} + \cancel{\dots} + \cancel{\dots} + \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - p(b-x)^{p-1}\frac{1}{(b-a)^p}R_{f,a,n}(b)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} - p(b-x)^{p-1}\frac{1}{(b-a)^p}R_{f,a,n}(b)$$

$$F'(c) = 0 = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} - p(b-c)^{p-1}\frac{1}{(b-a)^p}R_{f,a,n}(b)$$

$$R_{f,a,n}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\cdot p}(b-c)^{n-p+1}(b-a)^p$$

sedaj pa bjn večino x:

$$R_{f,a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^{n-p+1}(x-a)^p$$

TAYLORJEVA VRSTA

let I interval in $f \in C^\infty(I)$.

Potem $\forall a \in I$: priredimo f taylorjevo vrsto s sred. v a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ker je taylorjeva vrsta potenčna, se lahko zgodi:

- $R = 0$ s tem se ne bomo ukvarjali
- $R > 0$: na intervalu $(a-R, a+R)$ dobimo
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall x \in (a-R, a+R)$$

↳ lahko se zgodi:

$\exists x \in (a-R, a+R)$ $\ni$: $g(x) \neq f(x)$

↳ ali pa (dobra možnost)

$\forall x \in (a-R, a+R)$: $g(x) = f(x)$

Zapišimo $f(x) = T_{f,a,n}(x) + R_{f,a,n}(x)$

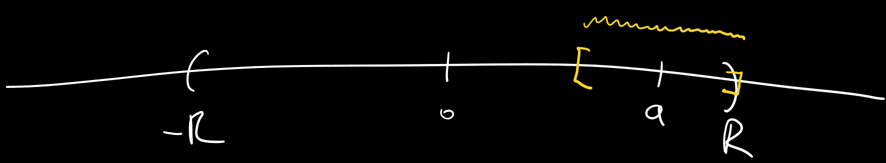
Če za neki $x \in (a-R, a+R)$ velja:

$$\lim_{n\to\infty} R_{f,a,n}(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} T_{f,a,n}(x)}_{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)!} \quad \text{za ta } x$$

tista vrsta

Izrek: Denimo, da je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ za $|x|<R$ za neki $R>0$.

Potem $\forall a: |a|<R \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$



Torej je f vsota prirejene Taylorjeve vrste.

Dokaz: Vzemimo $a=0$:

$$(f'(x))(0) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x\right)(0) = c_1 = f'(0)$$

$$(f^{(k)}(x))(0) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}\right)(0) = c_k k!$$

Sedaj premaknimo središče iz 0:

$$x = x - a + a$$

$$x^n = ((x-a)+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(x-a)^k \qquad \binom{n}{k} = 0, \text{ če } k>n$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n \binom{n}{k} a^{n-k}(x-a)^k =$$

dovoljeno zaradi abs. konv. vrste.

$$\hookrightarrow c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

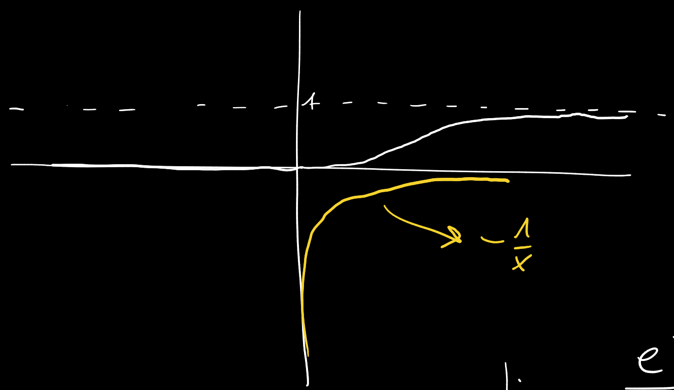
$$c_0 \qquad c_1(x-a) \qquad 2c_2 a(x-a) + c_2 a(x-a)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{n}{k} a^{n-k}}_{\substack{\text{konvergentno} \\ = b_k}} \underbrace{(x-a)^k}_{\text{brez } n} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b^k (x-a)^k}_{\text{potenčna vrsta,}}$$

konvergentna za $|x-a| < R - |a|$

b_k: k-ti odvodi f v a, deljeni s $k!$

Primer: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x \le 0 \end{cases}$



$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$f'(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{e^{-1/h}}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{e^{-1/h}}} \overset{L.H.}{=}$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\cancel{-\frac{1}{h^2}}}{e^{\frac{1}{h}} \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{h^2}\right)}} = 0$$

$$\lim_{h \uparrow 0} f(x) \overset{def}{=} 0$$

Velja tudi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

f pripadajoča Taylorjeva vrsta je $x \mapsto 0$, zato se f na nobenem odprtem intervalu, ki vsebuje 0, ne ujema s pripadajočo Taylorjevo vrsto.

Razvoj funkcij, ki so enake svojim pripadajočim Taylor. vrstam, kličemo razvoj realno analitičnih fj.

Def.: Let I interval in $f: I \to \mathbb{R}$ fja.
Pravimo, da je f realno analitična na I, če
$\forall a \in I \ \exists r_a > 0$ t.: f je vsota konvergentne potenčne vrste na $(a - r_a, a + r_a) \subset I$.

Oznaka: $f \in C^\omega(I)$.

nikoli enako

OPOMBA: $C^\omega(I) \subset C^\infty(I)$

TAYLORJEVE VRSTE OSNOVNIH fj.

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \sin x$ okoli točke 0:

$$\begin{aligned}
& & \sin 0 &= 0 \\
g'(x) &= \cos x & \cos 0 &= 1 \\
g''(x) &= -\sin x & -\sin 0 &= 0 \\
g'''(x) &= -\cos x & -\cos 0 &= -1 \\
g''''(x) &= \sin x & \sin 0 &= 0
\end{aligned}$$

Pripadajoča Tayl. vrsta:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \overset{?}{=} \sin x$$

dokazati je treba, da ostanki konvergirajo k 0:

$$R_{\sin, 0, n}(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

fiksiramo x:

$$|\sin^{(n+1)}(c)| \leq 1$$

$$0 \leq \left| \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{|x|\cdot|x|\cdot|x|\cdot|x|\cdot \ldots \cdot|x|}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| = 0 \quad \checkmark$$

---

za $\cos x$ lahko odvajamo vrsto za $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad /'$$

$$\cos x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$h(x) = \ln(1+x)$ v središču 0:

$$h'(x) = \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad / \int_0^x$$

↳ opazimo vsoto geom. vrste

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$h(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$|x| < 1$

izkaže se, da tudi pri $x = 1$ konvergira: $\ln 2 = \ln 2$.