$(f_n : D_{\subset \mathbb{R}} \to \mathbb{R})_n = (f_n)_n$

$(\mathbb{N} \to \{$ fje na $D)$

konvergenca po točkah: $x \in D$: $(f_n x)_n$ številsko zaporedje

če $(f_n x)_n$ konvergira za vsak $x \in D$, $(f_n)_n$ konvergira po točkah

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |f_n x - f x| < \varepsilon$

V tem primeru: $\lim_{n \to \infty} f_n x =: f x$ ~ limitna fja

za fiksen x

enakomerna konvergenca: $(f_n)_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ enakomerno na $D \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \ni : \forall n \geq N, x \in D : |f_n x - f x| < \varepsilon$

za vsak x, N je neodvisen od x, ustrezen za vsak x.

enakomerna konvergenca $\Rightarrow$ konvergenca po točkah

let $D \subset \mathbb{R}$, let $(f_n : D \to \mathbb{R})_n$ fijsko zaporedje na D.

pravimo, da je $(f_n)_n$ enakomerno Cauchyjevo na $D \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \ni : \forall n, m \geq N \ \forall x \in D : |f_n x - f_m x| < \varepsilon$

Opomba: Za Cauchyjev pogoj limitne fje (fx) ni treba poznati.

$(f_n)_n$ enakomerno Cauchyjevo na $D \iff (f_n)_n$ enakomerno konvergentno na D

Izrek: let $(f_n : D \to \mathbb{R})_n$ fijsko zaporedje na D.

$\forall n \in \mathbb{N}$: f_n zvezna na D in f_n enakomerno konvergira proti f na $D \Rightarrow$ f zvezna na D.

Dokaz. Predpostavimo $f_n x \xrightarrow[n \to \infty]{} f x$ enakomerno na $D \to \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \ \forall x \in D : |f_n x - f x| < \varepsilon$ $(*)$

izberimo poljubno $a \in D$. f zvezna v a.

Def. zveznosti: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |fx - fa| < \varepsilon$

izberimo poljuben $\varepsilon > 0$.

$|fx - fa| = |fx - f_n x + f_n x - f_n a + f_n a - fa| \leq$ (trikotniška neenakost)

$\leq \underbrace{|fx - f_n x|}_{\substack{< \varepsilon, \text{ če} \\ \text{je } n \geq N \\ \text{(enakom. konv.) } (*)}} + \underbrace{|f_n x - f_n a|}_{\substack{< \varepsilon, \text{ če} \\ \text{je } |x-a| < \delta \\ \text{(zveznost} \\ f_n)}} + \underbrace{|f_n a - fa|}_{\substack{< \varepsilon, \text{ če} \\ \text{je } n \geq N \\ \text{(enakom. konv.) } (*)}} <$

fiksiramo $n \geq N$. lahko je to $n = N$.

f_n v a zvezna $\Rightarrow$

$\exists \delta \ni : |x - a| < \delta$

$\Rightarrow |f_n x - f_n a| < \varepsilon$

$< 3\varepsilon$, čim je $|x - a| < \delta$

Definicija: Funkcijska vrsta. Let $(u_n : D \to \mathbb{R})_n$ fijsko zaporedje potem je $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ fijska vrsta.

Pravimo, da fijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira po točkah v D, če njeno funkcijsko zaporedje delnih vsot $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ konvergira po točkah v D tedaj limitno f-jo $(S_n)_n$ označimo z S in jo imenujemo vsota vrste.

Pravimo, da $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ enakomerno konvergira proti S na D, če $(S_n)_n$ enakomerno konvergira proti S na D.

Posledica: $\forall n \in \mathbb{N}$: u_n zvezna na D in $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira enakomerno na D proti $S \Rightarrow S$ zvezna. (**)

to ni ekvivalenca

Posledica: Let $(u_n : D \to \mathbb{R})_n$ fijsko zaporedje. tedaj je fijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ enakomerno konvergentna na $D \iff$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je enakomerno cauchyjeva

$$\Updownarrow$$

$(S_n)_n$ enakomerno cauchyjevo

definicija

$S_n: u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$
$S_m: u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots + u_m$
$S_n - S_m: 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + u_{n+1} + \dots + u_m$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m > N \ \forall x \in D: |\boxed{S_n x - S_m x}| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m > N \ \forall x \in D: \left| \sum_{i=\min\{n,m\}+1}^{\max\{n,m\}} u_i x \right| < \varepsilon$$

Primer: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1 - x^n)$

a.) vrsta konvergira $\forall x \in [0,1]$ in s tem določa vsoto $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

b.) določi $f(x)$

c.) a je konvergenca na $[0,1]$ enakomerna

a.) fiksirajmo $x \in [0,1]$

$x = 0$: vrsta konvergira in $f(0) = 0$

$x = 1$: vrsta konvergira in $f(1) = 1$

$x \in (0,1)$: vrsta ima pozitivne člene in lahko uporabimo {primerjalni, korenski, kvocientni} kriterij.

vidiš ??

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}(1-x^{n+1})}{\cancel{x^n}(1-x^n)} = x\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x \frac{1-x^{n+1}}{1-x^n} = x \qquad x^{n+1} \to 0, \ x^n \to 0$$

Vrsta konvergira, ker $\lim_{n\to\infty} a_n = x < 1$ ✓

b.) $x \in (0,1)$.

→ ker sta vrsti na desni konvergentni

does not apply

kvor infiniti ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n}) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}}_{\text{Geometrijski vrsti}} =$$

$= \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2}$

{ vrsta $\sum_{n=1} a_n$ je geometrijska, če $\frac{a_n}{a_{n+1}} = q$ (const.) }

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x=0 \\ 1; & x=1 \\ \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2}; & x \in (0,1) \end{cases}$$

(.) a je konvergenca enakomerna na $[0,1]$?

po posledici (# #) če je f zvezna, je konvergenca enakomerna. → s to posledico lahko enakomerno konvergenco le ovržemo.

f zvezna na $[0,1]$?

$\hookrightarrow x \in (0,1)$ da, ker je kompozitum elementarnih

$\hookrightarrow x=0$: $f(0) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ✓

$\hookrightarrow x=1$: $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2}\right) =$

$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x(1+x) - x^2}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{1-x^2} = +\infty$ ($1-x^2 \to +0$)

ni zvezna v 0!

Zato konvergenca ni enakomerna. Če bi bila, bi bila limitna f-ja zvezna.

Weierstrassov kriterij za enakomerno konvergenco funkcijskih vrst:

let $(u_n : D \to \mathbb{R})_n$ funkcijsko zaporedje na D. $D \subseteq \mathbb{R}$ (*)

denimo, da $\exists$ številsko zaporedje $(c_n)_n \ni: \forall x \in D: |u_n x| \leq c_n$

in denimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentna. tedaj je $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ enakomerno in absolutno konvergentna na D.

Če so $\forall n \in \mathbb{N}$: u_n zvezna $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ zvezna.

Dokaz: iz pogoja (*) sledi, da $c_n \geq 0$ in da je

$\forall x \in D$: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ majoranta za $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n x|$

Po primerjalnem kriteriju ker $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira, konvergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n x|$, torej $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x$ absolutno konvergira.

absolutna konvergenca $\Rightarrow$ konvergenca.

Kaj pa enakomerna konvergenca $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ na D.

Dokažimo enakomerno cauchyjevost $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ na D.

$\forall x \in D$ $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \ni: \forall n,m > N: \left| \sum_{i=\min\{n,m\}+1}^{\max\{n,m\}} u_i x \right| < \varepsilon$

BSŠ $n > m$:

$\left|\sum_{i=m+1}^{n} u_i x\right| = |u_{m+1} x + u_{m+2} x + \dots + u_n x| \leq$

$$\leq |u_{m+1}x| + |u_{m+2}x| + \dots + |u_n x|$$

$$\overset{(*)}{\leq} c_{m+1} + c_{m+2} + \dots + c_n < \varepsilon, \text{ če je } m+1 > N$$

Ker je $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentna, izpolnjuje Cauchyjev pogoj:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n,m > N: |c_n - c_m| < \varepsilon$

$\square$

Primer: Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna številska vrsta. Tedaj sta funkcijski vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ obe enakomerno konvergentni po Weierstrassovem kriteriju:

$$|a_n \sin(nx)| \leq |a_n|$$

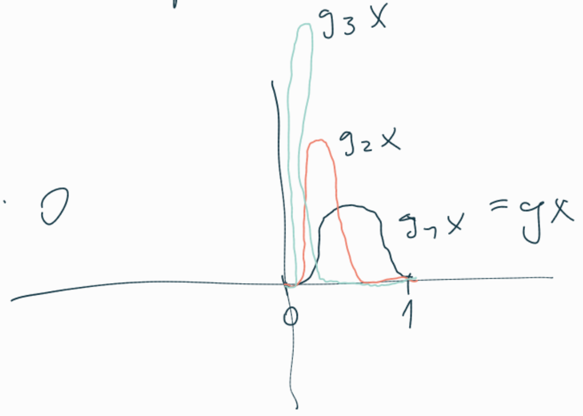
$$\sum |a_n| \text{ konverg.} \implies \text{enak. konv.}$$

[INTEGRIRANJE IN ODVAJANJE funkcijskih ZAPOREDIJ IN VRST]

Zgled: $g_n(x) = n\, g(nx)$

$(g_n)_n$ konvergira po točkah proti 0

$$\int_0^1 g_n x\, dx = \int_0^1 g x\, dx$$



$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n x\, dx = \int_0^1 g x\, dx > 0$$

$$\neq \qquad\qquad \neq$$

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} g_n x\right) dx = 0$$

Izrek: Let $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})_n$ zaporedje zveznih fj in denimo, da f_n konvergira proti f enakomerno na $[a,b]$.

Potem velja: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n x\, dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n x\right) dx = \int_a^b f x\, dx$

Dokaz: predpostavka: • f_n konvergira proti f enakomerno na $[a,b]$
• f_n zvezna.

dokažimo konvergenco številskega zaporedja $\left(\int_a^b f_n x\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Velja $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in [a,b]: |f_n x - f x| < \varepsilon$

$$\left|\int_a^b f_n x\, dx - \int_a^b f x\, dx\right| = \left|\int_a^b (f_n x - f x)\, dx\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f_n x - f x|}_{< \varepsilon,\ \text{enakomerna konvergenca za } n \geq N} dx < \int_a^b \varepsilon\, dx = \varepsilon(b-a) \quad \square$$

trikotniška neenakost za integrale

integrali obstajajo zaradi zveznosti

$f x \le g x \Rightarrow \int_a^b f x\,dx \le \int_a^b g x\,dx$

$-|f x| \le f x \le |f x| \Rightarrow$

$-\int_a^b |f x| dx \le \int_a^b f x\,dx \le \int_a^b |f x| dx$

$\Downarrow$

$$\left|\int_a^b f x\,dx\right| \le \int_a^b |f x|\,dx$$

Posledica: Naj $(u_n : D \to \mathbb{R})_n$ zaporedje zveznih fj in denimo $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ enakomerno konvergira na $D = [a,b]$.

Potem velja: $$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n x\,dx$$

Izrek: Naj $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})_n$ zaporedje zvezno odvedljivih fj na $[a,b]$.

Denimo, da $(f_n')_n$ enakomerno konvergira na $[a,b]$ proti limiti fji, označeni z g in denimo, da $\exists c \in [a,b] \ni: (f_n c)_n$ konvergira.

Potem velja: $(f_n)_n$ konvergira enakomerno na $[a,b]$ k neki zvezno odvedljivi fji f in velja:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \big(\underbrace{\lim_{n\to x} f_n}_{f}\big)'(x)$$

zdb: zamenjava vrstnega reda odvajanja in limite

Dokaz: ker je f_n' zvezna je:

$$\forall\ x \in [a,b]: \int_c^x f_n' t\,dt = f_n x - f_n c$$

$$\int_c^x f_n' t\,dt + f_n c = f_n x$$

$\int_c^x f_n' t\,dt \xrightarrow[\text{enakomerno}]{n\to\infty} g t$, $\quad f_n c \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n c}_{\text{limita } \exists}$

Zato velja $$\overset{f(x)}{\lim_{n\to\infty}} f_n x = \int_c^x g t\,dt + \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n c}_{\exists},$$

zato $(f_n)_n$ konvergira po točkah.

velja $f(x) = \underbrace{\int_c^x g t\,dt}_{} + \underbrace{\lim_{n\to x} f_n c}_{\text{konstanta}}$

vemo: g je zvezna (limita enakomerno konv. zap zveznih fj)

$\underbrace{x \longmapsto \int_c^x g t\,dt}$ je odvedljiva in njen odvod je g.

zato je $f(x)$ odvedljiva in $f'(x) = g(x)$

Za enakomerno konvergenco je treba pogledati

$$|f x - f_n x| = \left|\int_c^x g t\,dt + \lim_{n\to\infty} f_n c - \int_c^x f_n' t\,dt - f_n c\right| \le$$

3 x ušesna neenakost

$$\le \left|\int_c^x (g t - f_n' t)\,dt\right| + \left|\lim_{n\to\infty} f_n c - f_n c\right| \le$$

$$\le \underbrace{\int_c^x |g t - f_n' t|\,dt}_{< \varepsilon,\ n \text{ velik}} + \underbrace{\left|\lim_{n\to\infty} f_n c - f_n c\right|}_{< \varepsilon,\ n \text{ velik}} \le$$

$$\le (x-c)\varepsilon + \varepsilon \quad \checkmark \ \square$$

Posledica: Naj $(u_n : [a,b] \to \mathbb{R})_n$ zaporedje zvezno odvedljivih funkcij na $[a,b]$ in denimo, da $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ enakomerno konvergira na $[a,b]$ in denimo, da $\exists c \in [a,b]$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n c$ konvergira. Tedaj $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ enakomerno konv. na $[a,b]$ in velja $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n x\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$

zdb.: zamenjava vrstni red seštevanja in odvajanja.

[POTENČNE VRSTE]

Naj $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ št. zap. in $c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ fiksno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ imenujemo potenčna vrsta.

Primer: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergira $\Leftrightarrow$ $|x|<1$

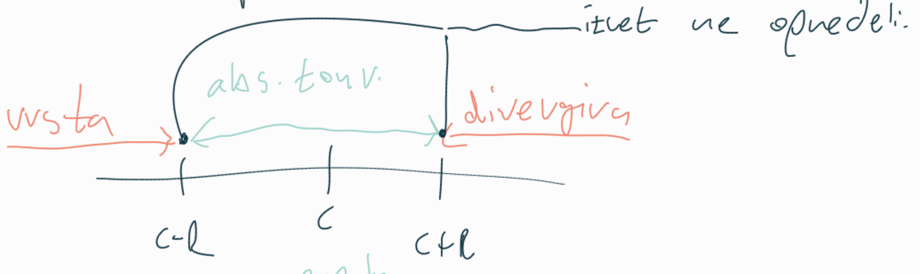
Izrek: Naj $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ potenčna vrsta. Potem $\exists R \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$ $\ni$:

če vzamemo x, da velja $|x-c|<R$, potem vrsta konvergira in konvergira absolutno v x.

če x, $|x-c|>R$, vrsta divergira v x.

če $0<r<R$, vrsta enak. konv. na $[c-r, c+r]$

število R imenujemo konvergenčni polmer fiksne vrste.



na zaprtem intervalu c $(c-R, c+R)$ enak. konv.

Dokaz: Naj $c=0$

denimo, da vrsta konvergira v $x = x_0$. Naj $0<r<|x_0|$. (**)

Dokažimo, da vrsta abs in enakom konv na $[-r,r]$.

ker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konv., $\lim_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0$, zato $\exists M$, da je $|a_n| \cdot |x_0|^n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

↳ omejeno.

$x \in [-r,r]: \; |a_n x^n| \le |a_n| r^n = |a_n| \frac{r^n}{|x_0|^n} |x_0|^n \le M \cdot \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$

$\frac{r}{|x_0|} < 1$ (**)

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$ je konvergentna št. vrsta.

po Weierstrassovem kriteriju $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira enak. in abs.

$R = \sup_{x_0,\ \text{za katere vrsta konvergira}} |x_0|$