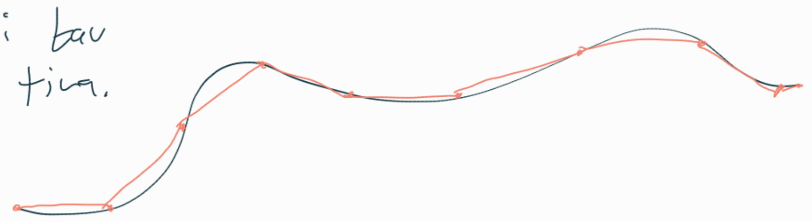
$F: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zv. odv, potem
(α, β)

dolžina poti: $\ell F = \int_a^b \sqrt{\dot\alpha^2 t + \dot\beta^2 t}\, dt$

↳ to ni tav dolžina tira.



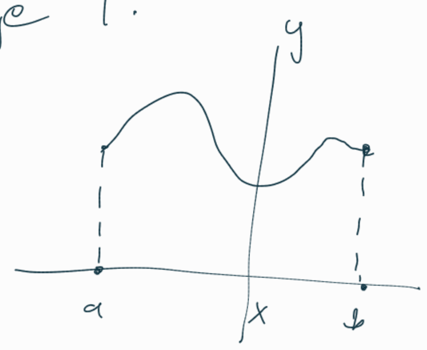
↳ da je dolžina poti dolžina tira, je potrebna regularna parametrizacija, tj. da se pomikamo le v pozitivno smer.

Vse regularne parametrizacije istega tira poti imajo enako dolžino. Ne bomo dokazali.

Primer: če je krivulja K graf fje f:

$$\ell K = \int_a^b \sqrt{\dot\alpha^2 t + \dot\beta^2 t}\, dt =$$

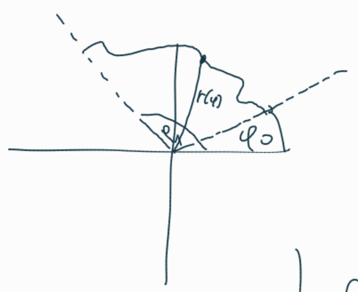
$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2 t}\, dt$$



$\alpha(t) = t$
$\beta(t) = f(t)$

Primer: krivulja je podana polarno:

$r = r(\varphi)$



$\alpha\varphi = \mathrm{Re}(r e^{i\varphi}) = r(\varphi)\cos\varphi$
$\beta\varphi = \mathrm{Im}(r e^{i\varphi}) = r(\varphi)\sin\varphi$
↳ $r(\varphi)$

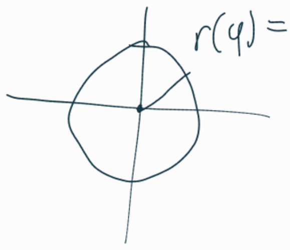
$\dot\alpha\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$
$\dot\beta\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$

$$\dot\alpha^2\varphi + \dot\beta^2\varphi =$$
$$= (r'(\varphi))^2\cos^2\varphi + r^2(\varphi)\sin^2\varphi - \cancel{2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi}$$
$$+ (r'\varphi)^2\sin^2\varphi + r^2\varphi\cos^2\varphi + \cancel{2r'\varphi r\varphi\cos\varphi\sin\varphi} =$$

$$= (r'\varphi)^2 + r^2(\varphi)$$

$$\ell K = \int_a^b \sqrt{(r'\varphi)^2 + r^2\varphi}\, d\varphi$$

Primer: obseg kroga:



$r(\varphi) = a \quad \varphi \in [0, 2\pi)$

$r'(\varphi) = 0$

$$\ell K = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + a^2} = \int_0^{2\pi} a^2\, d\varphi = a\, 2\pi$$

Kaj pa ploščina parametrične krivulje?

let $F:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot

$F=(\alpha,\beta)$

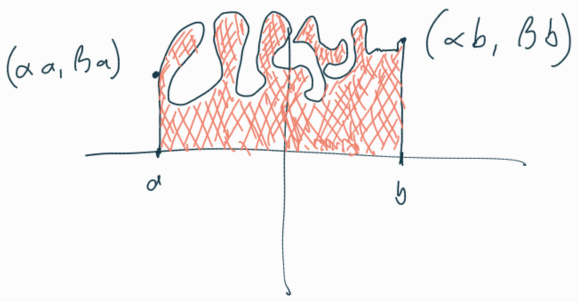
a.) če je $\beta(t)\geq 0 \ \forall t\in[a,b]$ in je

$\alpha(a)=\min\{\alpha(t);\ t\in[a,b]\}$ in

$\alpha(b)=\max\{\alpha(t);\ t\in[a,b]\}$.

tedaj ploščino lika med krivuljo in osjo x med $[\alpha a, \alpha b]$ izračunamo z

$$\int_a^b \beta(t)\,\dot\alpha(t)\,dt$$



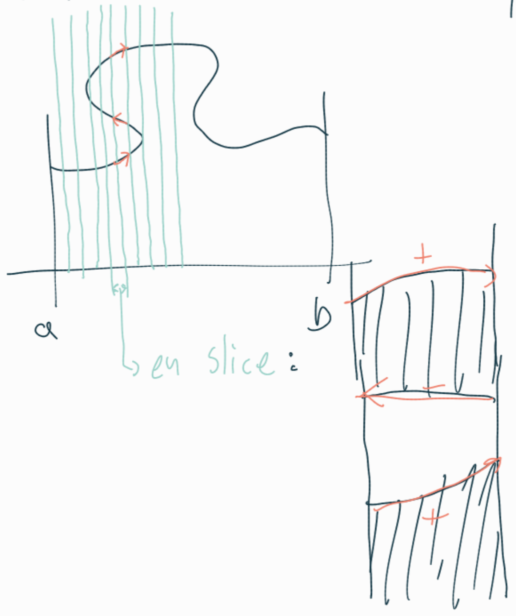
preprečuje tako situacijo:

b.) če je $\alpha(t)\geq 0$ in $\beta(a)=\min\{\beta(t);\ \forall t\in[a,b]\}$ in
$\beta(b)=\max\{\beta(t);\ \forall t\in[a,b]\}$, je

ploščina lika med y-osjo in krivuljo

$$\int_a^b \alpha(t)\,\dot\beta(t)\,dt$$

Ideja dokaza

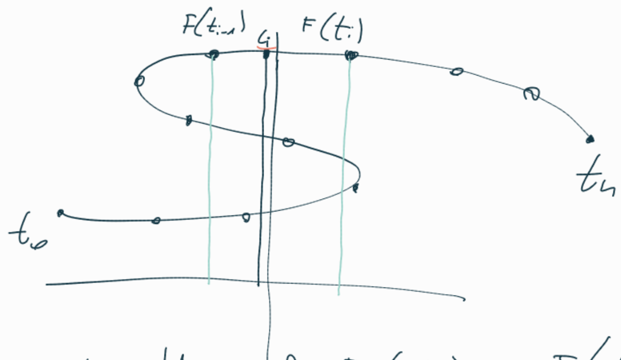


let P delitev $[a,b]$:

$a=t_0<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n=b$

ustrezen izbor testnih točk $\{c_i\}=T_P$

$c_i\in[t_{i-1},t_i]$



Predznak tega [prispevka] je določen s predznakom razlike x-koordinat

del krivulje med $F(t_{i-1})$ in $F(t_i)$ prispeva k ploščini

$[\beta(c_i)(\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1}))]$

Približek ploščine je $\sum_{i=1}^{n}\beta(c_i)(\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1}))=$

lagrange

$= \sum_{i=1}^{n}\beta(c_i)\dot\alpha(d_i)(t_i-t_{i-1}) \approx R(\beta\cdot\dot\alpha, P, T_P)$

dovolj drobna delitev, da je $c_i \approx d_i$

ko gre velikost delitve proti nič:

$$=\int_a^b \beta(t)\,\dot\alpha(t)\,dt$$

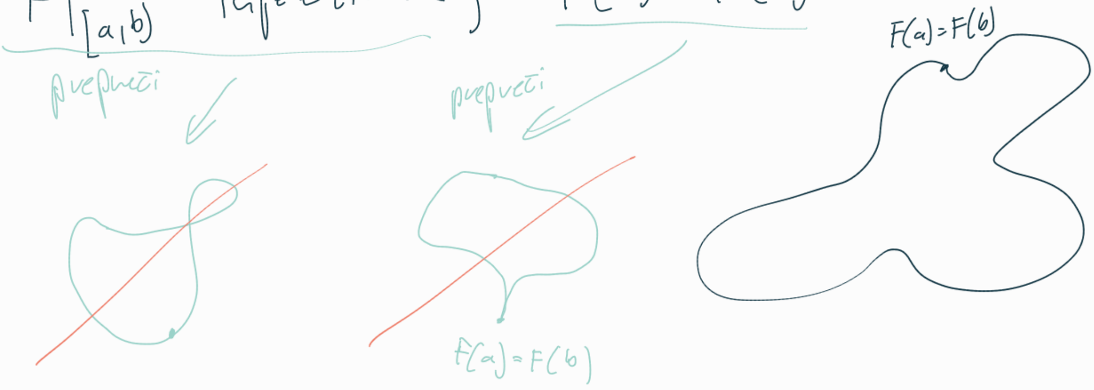
Def.: let $F:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ injektivna regularna parametrizacija

↓ nima samopresečišč ↳ hitrostni vektor je vedno pozitiven

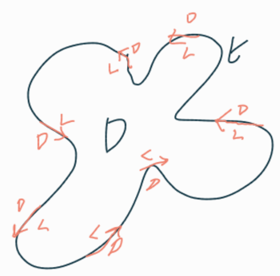
Potem F določa **usmerjenost** tira poti F, določeno s smerjo, v kateri potuje $F(t)$ po $F([a,b])$, ko gre t od a do b.

Gladka enostavno sklenjena krivulja je gladka pot K, ki ima regularno parametrizacijo $F:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, za katero velja $F(a)=F(b)$, → sklenjena

$F|_{[a,b)}$ injektivna, $\dot F(a)=\dot F(b)$:



Označimo z D območje, ki ga omejuje gladka enostavna sklenjena krivulja K.



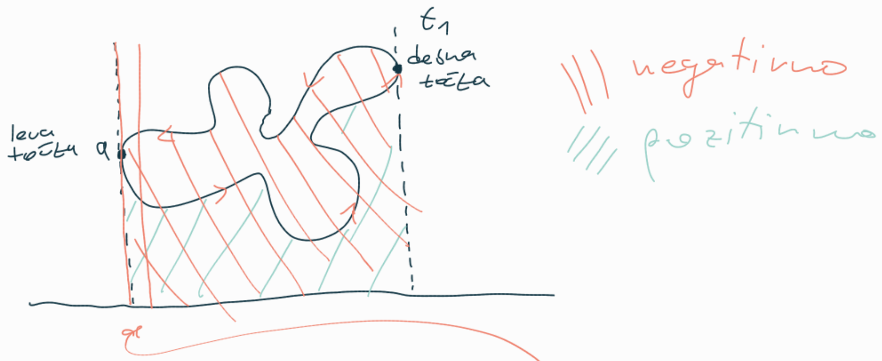
Regularna parametrizacija K določa pozitivno usmerjenost K, če je D na levi strani, ko se vzdolž K premikamo v smeri parametrizacije.

Let $F=(\alpha,\beta):[a,b]\to\mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija enostavne sklenjene krivulje K, ki določa pozitivno usmerjenost $K=F([a,b])$. Potem je ploščina D znotraj K

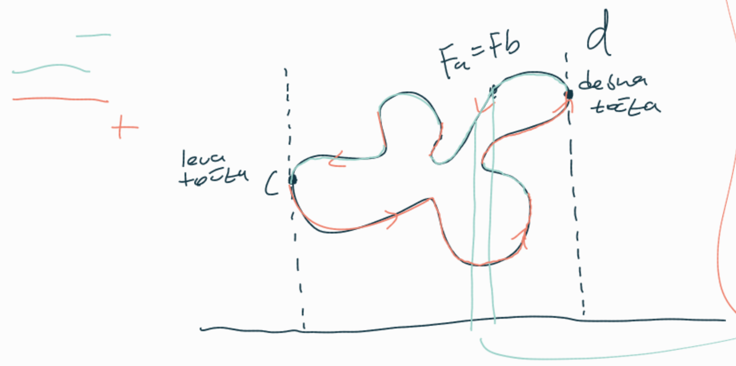
$$\left[\int_a^b \alpha(t)\,\dot\beta(t)\,dt = -\int_a^b \dot\alpha(t)\,\beta(t)\,dt\right] = \boxed{\frac{1}{2}\int_a^b \left(\alpha(t)\,\dot\beta(t)-\dot\alpha(t)\,\beta(t)\right)dt}$$

prof. pravi, da pri izračunih uporabljamo tole, ti dve bomo pa dokazali.

Skica dokaza:



kaj pa če leva točka ni a?



isto, le da slices začnemo delati s tem, prej pa z levim.

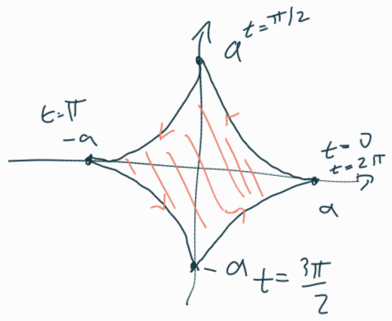
izračunaj ploščino astroide:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad a>0 \qquad \text{(implicitno)}$$

$$\alpha(t) = a\cos^3 t$$
$$\beta(t) = a\sin^3 t \qquad ; \quad t\in[0,2\pi]$$

$$F(0) = F(2\pi)$$

$$F = (\alpha, \beta)$$



$$\dot\alpha(t) = 3a\cos^2 t(-\sin t)$$
$$\dot\beta(t) = 3a\sin^2 t\cos t$$

površina: $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\alpha t\dot\beta t - \dot\alpha t\beta t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t\, 3a\sin^2 t\cos t + 3a\cos^2 t\sin t)\,dt =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2(\sin^2\cos^4 t + \cos^2 t\sin^4 t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt = \frac{3}{4}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt =$$

$$2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$$
$$\downarrow$$
$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3\pi}{8}a^2$$

kaj pa ploščina zanke, ki je podana polarno?

$$r = r(\varphi), \quad \varphi\in[a,b)$$

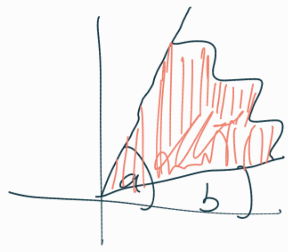
$$\alpha(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \qquad \dot\alpha(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)(-\sin\varphi)$$
$$\beta(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \qquad \dot\beta(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$$

$$\frac{1}{2}(\alpha\dot\beta - \dot\alpha\beta)(\varphi) = \frac{1}{2}\big(\cancel{r\varphi r'\varphi\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\varphi\, r'^2\varphi\cos^2\varphi - \cancel{r\varphi r'\varphi\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\varphi\sin^2\varphi\big) =$$

$$= \frac{1}{2}r^2\varphi$$

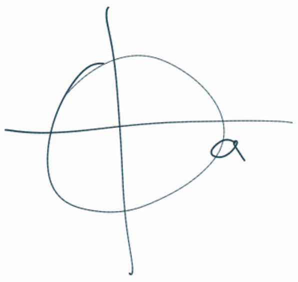
torej ploščina: $\frac{1}{2}\int_a^b r^2\varphi\,d\varphi$

kaj če vzamemo sklenjene krivulje?



tedaj je ploščina.

Ploščina kroga s polmerom a.



$$r(\varphi) = a$$

$$pl = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 2\pi = a^2\pi \checkmark$$

[FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN VRSTE]

Def: let $D \subseteq \mathbb{R}$ in $f_n: D \to \mathbb{R}$ funkcije $\forall n \in \mathbb{N}$. Pravimo, da je $\{f_n\}_n$ funkcijsko zaporedje.

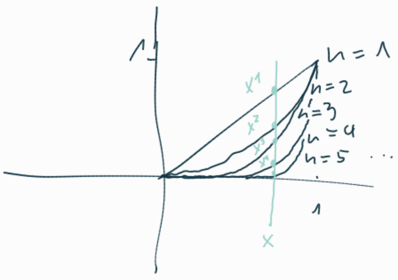
Če $\forall x \in D: \underbrace{\{f_n(x)\}_n}_{\text{številsko zaporedje}}$ konvergira, pravimo, da $\underbrace{\{f_n\}_n}_{\text{funkcijsko zaporedje}}$ konvergira po točkah v D. V tem primeru fji $\boxed{f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n x, \; f: D \to \mathbb{R}}$ rečemo limitna fja.

Pravimo, da f konvergira enakomerno na D, če

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall x \in D: \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

PRIMER *:

$f_n x = x^n \; ; \; x \in [0,1]$



limitna fja:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0,1) \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

enakomerna konvergenca:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in D: \quad n \geq N \Rightarrow |f_n x - f x| < \varepsilon$$

Velja: če $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ (konvergira) enakomerno na D, potem $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ po točkah na D (iz definicije) (dokaz DN)

obratno pa ni nujno res. PRIMER * po točkah konvergira, enakomerno pa ne.

$f_n(x) = x^n \quad x \in [0,1]$

Ekvivalenten pogoj za enakomerno konvergenco:

z M_n označimo $\sup\{|f_n x - f x| \; ; x \in D\}$

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ enakomerno na } D \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} M_n = 0$$

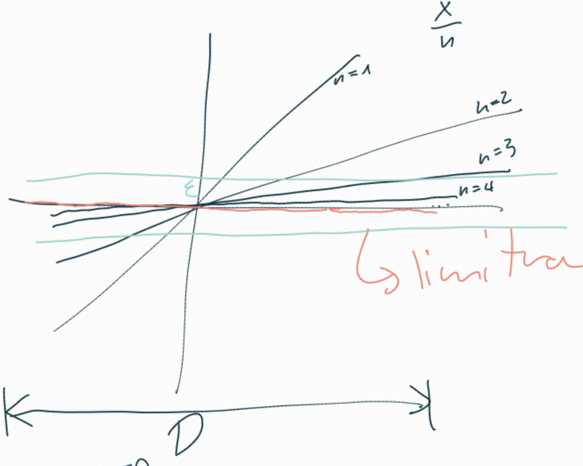
Primer: $f_n x = \frac{x}{n}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ obravnavaj enakomerno konvergenco $(f_n)_n$ v odvisnosti od D.

limitna fja: $x \in D$: ali $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = f(x)$

$M_n = \sup\{|f_n x - f x|, x \in D\} = \sup\{|\frac{x}{n} - 0|, x \in D\} = \sup\{|\frac{x}{n}|, x \in D\}$.

če je D neomejena, je $M_n = \infty$, torej ne konvergira enakomerno

če je D omejena, je $0 < M_n < \frac{c}{n}$, torej konvergira enakomerno
$\underset{0}{\downarrow_{n\to\infty}}$ $\underset{\text{sendvič}}{\downarrow}$ $\downarrow_{n\to\infty}$ 0

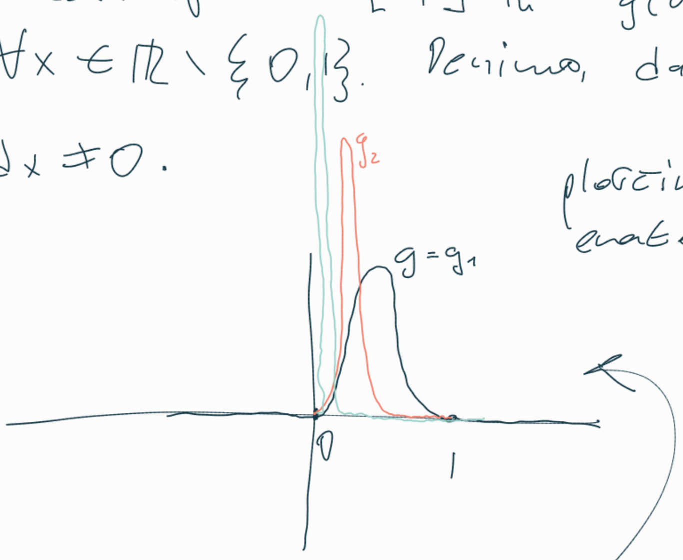


↳ limitna fja $f(x)=0$

čim je D neomejena, bodo neke premice presegle ε-pas. če pa ni, pa lahko izberemo dovolj velik N, da ne bodo.

PRIMER: Let g zvezna fja na $[0,1]$ in $g(0)=0=g(1)$ in $g(x)=0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Recimo, da

$$\int_0^1 g(x)\, dx \neq 0.$$



ploščine so enake.

Definiramo $g_n(x) = n g(nx)$

limitna fja: $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n g(nx) = 0$

čim je n dovolj velik, se nosilec fje pomakne čisto na levo.

$$\int_0^1 g_n x\, dx = \int_0^1 n g(nx)\, dx =$$

$nx = t$
$n dx = dt$

$$= \int_0^n g t\, dt = \int_0^1 g t\, dt$$ (ploščine so neodvisne od n)

ne velja: $\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 g_n x\, dx\right)}_{\text{limita obstaja in } \neq 0} = \underbrace{\int_0^1 \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}(g_n x)}_{0} dx}_{0}$