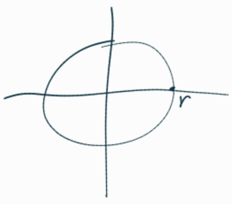
ANA2PFMF 2024-04-01 : KAKO PODAMO KRIVULJE?

Primer: Krožnica:



Potrebujemo koordinatni sistem.
↳ kartezični s centrom v centru 0.

$$x^2+y^2=r^2 \quad \text{(implicitno)}$$

Ker krožnica ni graf, je eksplicitno ne moremo podati s funkcijo ene spremenljivke
ali pa s f-jo 2 spr: $g(x,y) = x^2+y^2-r^2$
ker $\nabla g(x,y) \neq 0$ za vse točke, kjer $g(x,y)=0$.
Zato je po izreku o implicitni f-ji krožnica v okolici vsake svoje točke graf nad eno od osi.

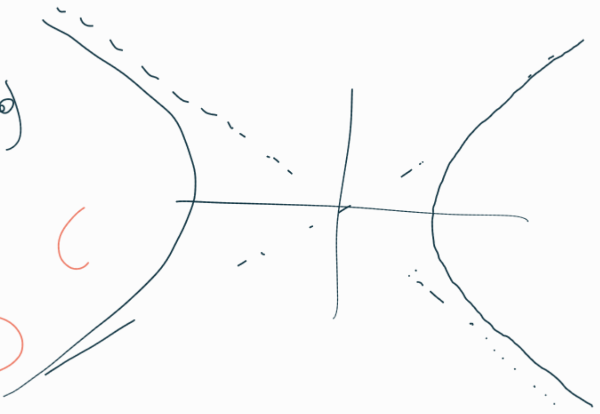
Krožnico lahko podamo parametrično: $\boxed{\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \end{cases}}$ $t\in[0,2\pi)$

Primer: Elipsa v izhodišču

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(implicitno podana)}$$

parametrizacija: $x(t)=a\cos t$ $\quad t\in[0,2\pi)$
$y(t)=b\sin t$

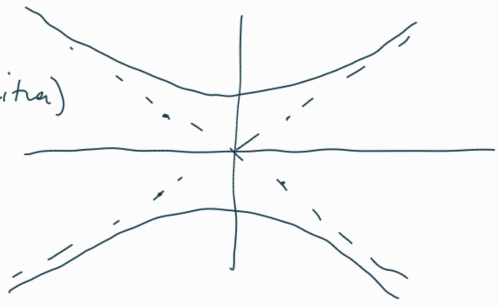
Primer: Hiperbola v izhodišču



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(implicitno)}$$

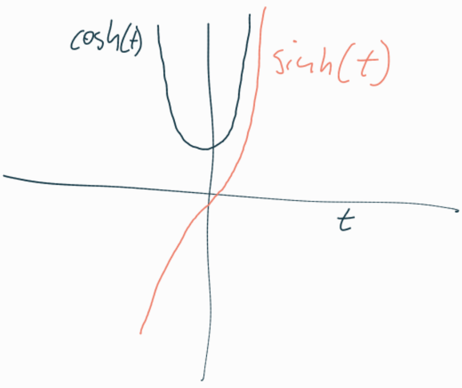
parametrično:
$x(t)=a\cosh(t)$ $\quad x\in\mathbb{R}$
$y(t)=b\sinh(t)$
$x(t)=-a\cosh t$ $\quad x\in\mathbb{R}$
$y(t)=-b\sinh t$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(implicitna)}$$



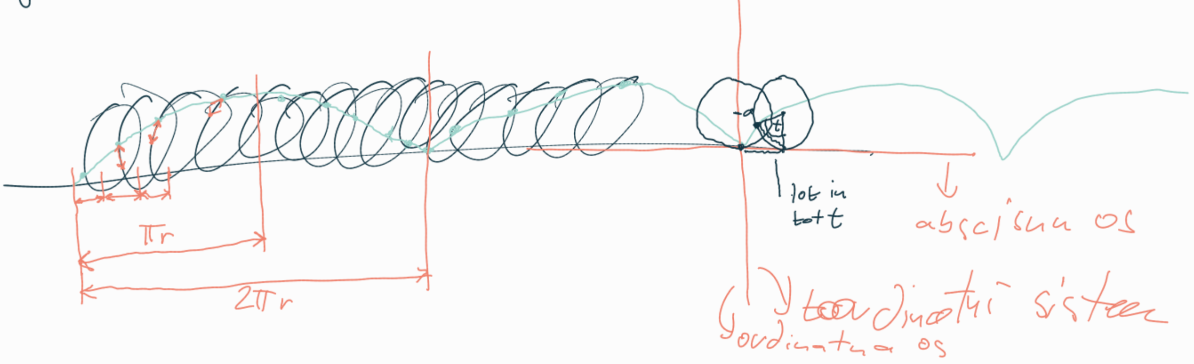
parametrično
$x(t)=a\sinh(t)$
$y(t)=b\cosh(t)$
$x(t)=-a\sinh(t)$
$y(t)=-b\cosh(t$

$$\cosh^2-\sinh^2=1$$



Primer: Cikloida

Cikloida je krivulja, ki jo opiše točka na obodu valja, ki ga kotalimo po ravni podlagi.



Podatek: radij kroga – enota koord. sist. (a)
parameter: kot t

dolžina loka je at – razdalja dotikališča valja z absciso do središča je at

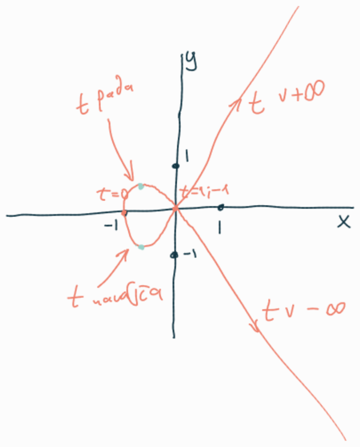
Parametrizacija:

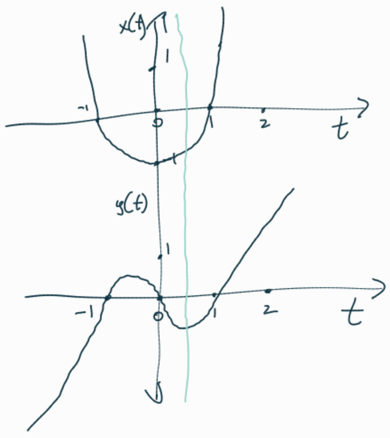
$$x(t) = at - a\sin t = a(t - \sin t)$$
$$y(t) = a - a\cos t = a(1 - \cos t)$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

(NTS: Eksplicitno?)

Primer: nariši krivuljo, ki je parametrično podana takole:

$$x(t) = t^2 - 1 \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = t^3 - t = t(t-1)(t+1)$$

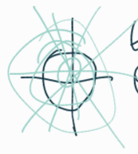




Wow!

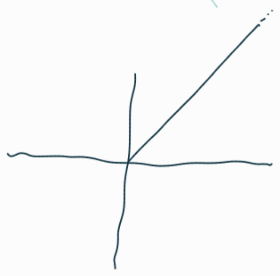
Krivulje v polarnih koordinatah

Primer: $r = 1$:

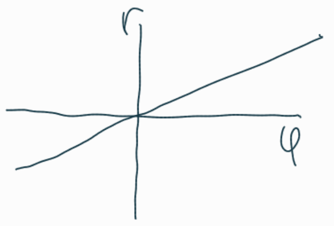


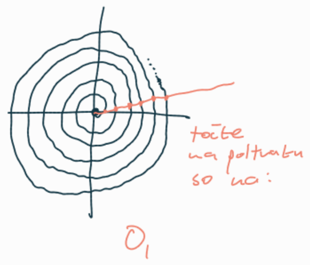
krožnica s središčem v izhodišču in polmerom 1

$\varphi = \frac{\pi}{4}$:



$r = k\varphi$, $k \in \mathbb{R}^+$



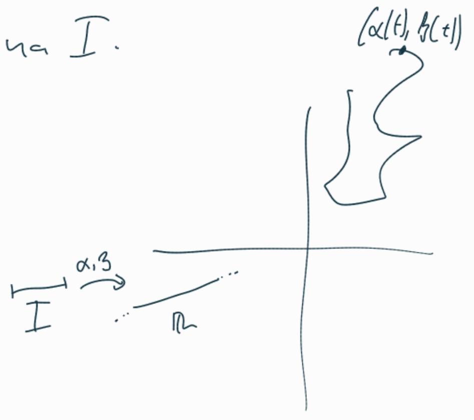


za $k \in \mathbb{R}^-$

Definicija: Pot v ravnini je preslikava $F = (\alpha, \beta): I \to \mathbb{R}^2$, kjer je I interval v $\mathbb{R}$ in α, β sta zvezni fji na I.

Tir poti je množica $\{(\alpha(t), \beta(t));\ t \in I\} = C$.

Pravimo, da je F parametrizacija od C.



OPOMBA: C določa več različnih parametrizacij

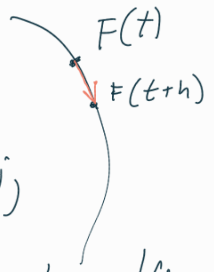
npr. po C se lahko premikamo z različno hitrostjo in smerjo.

Def.: Pravimo, da je pot $F = (\alpha, \beta): I \to \mathbb{R}^2$ odvedljiva, če sta α in β odvedljivi fji na I in zvezno odvedljiva, če sta α in β zvezno odvedljivi na I.

Označimo $\dot{F}(t) = F'(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t)) = (\alpha'(t), \beta'(t))$

$\dot{F}(t)$ se imenuje tangentni vektor poti F v točki $F(t)$ ali hitrostni vektor.

$$\dot{F}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(F(t+h) - F(t) \right)$$

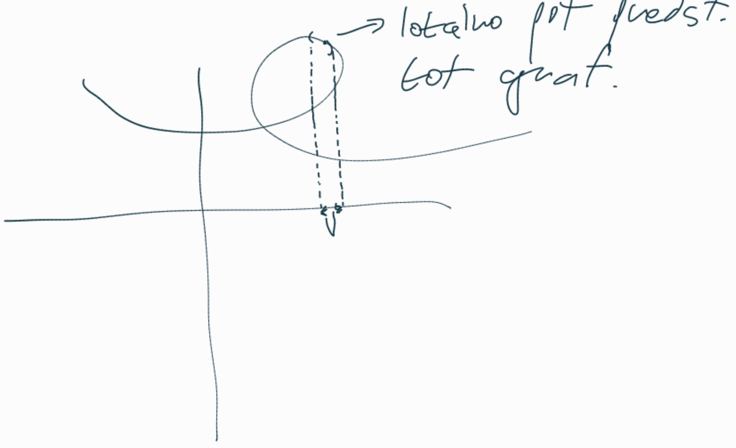


hitrostni vektor seveda ni enotski; njegova magnituda je odvisna od hitrosti, s katero se pomikamo po krivulji.

IZREK: Let $F : I \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot.
Denimo, da $\exists t_0 \in I \ni: \dot{F}(t_0) \neq 0$ in $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$.
Potem $\exists \delta > 0$, da lahko krivuljo $K = \{ F(t) ;\ |t - t_0| < \delta \}$ zapišemo kot graf odvedljive fje nad intervalom U okoli točke $x_0 = \alpha(t_0)$:

$$K = \{ (x, f(x)) ;\ x \in U \}.$$

Velja: $f'(\alpha(t)) = \dfrac{\dot{\beta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}$; za $|t - t_0| < \delta$

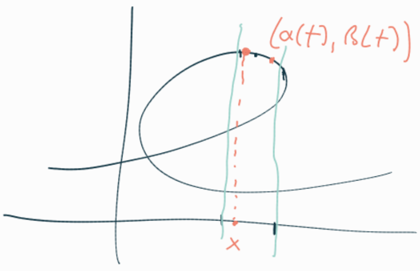


Izrek podoben za $\dot{\beta}(t_0) \neq 0$

Dokaz: Denimo $\dot{\alpha}(t_0) > 0$. Ker $\dot{\alpha}$ zvezna, je $\dot{\alpha}$ pozitiven je na okolici t_0, zato je α strogo naraščajoča na nekem intervalu $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ za neko $\delta > 0$. ~~Zato~~ interval $U = (\alpha(t_0 - \delta), \alpha(t_0 + \delta))$ bijektivno preslika α na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ v funkcijo $\sigma = \alpha^{-1}$;
σ je zvezna in odvedljiva.

v $f(x)$ je $x \in U$; $t = \sigma(x)$

$$f(x) = \beta(t) = \beta(\sigma(x))$$



x projiciran na pot je torej v točki $(\alpha(\sigma(x)), \beta(\sigma(x))) = (\alpha(t), \beta(t))$

Dokažimo, da je ta točka dobro izbrana.

vzemimo $x \in U$: $t = \sigma(x) \Leftrightarrow x = \alpha(t)$

$$(x, f(x)) = (\alpha(t), \beta(t))$$

$f(x) = \beta(\sigma(x))$

f je odv, ker je kompoz. odv. f.

$$f(\alpha(t)) = \beta(t) \quad \text{za } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad /'$$

$$f'(\alpha(t)) \underbrace{\alpha'(t)}_{\neq 0} = \beta'(t)$$

$$f'(\alpha(t)) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}$$

Definicija: let $F: I \to \mathbb{R}^2$ odvedljiva pot. Če je $\dot{F}(t) = 0$, potem je t **kritična točka** preslikave F.
Če je $\dot{F}(t) \neq 0$, je t **regularna točka** F.
Če so vse točke $t \in I$ regularne tč. od F, je F **regularna parametrizacija** tira poti F.
Tir injektivne regularne parametrizacije je **gladka krivulja**.

ima regularno parametrizacijo, a ni gladka, ker ima samopresečišče, torej ne obstaja injektivna pot.

Trditev: let $g: A \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva f-ja 2 spr v okolici točke $(a,b) \in A \subset \mathbb{R}$, $g(a,b) = 0$ in $\nabla g(a,b) \neq 0$.
tedaj ima $\{(x,y) \in A;\ g(x,y) = 0\}$ tangento v (a,b), ki je dana z enačbo $g_x(a,b)(x-a) + g_y(a,b)(y-b) = 0$

Dokaz: recimo da $g_y(a,b) \neq 0$. Po izreku o implicitni f-ji je množica $g(x,y)=0$ v okolici (a,b) podana kot graf f-je $y = f(x)$ za x blizu a in $f(a) = b$.
Po izreku o implicitni f-ji je f odvedljiva in $f'(a) = -\dfrac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$

enačba tangente na $g(x,y)=0$ v (a,b):

$$y - b = f'(a)(x-a)$$
$$y - b = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}(x-a)$$
$$g_y(a,b)(y-b) = -g_x(a,b)(x-a)$$
$$g_y(a,b)(y-b) + g_x(a,b)(x-a) = 0 \qquad \square$$

kaj pa $\boxed{\text{PLOSKVE V } \mathbb{R}^3}$?

ploskev lahko podamo:
- eksplicitno, kot graf f-je $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$P = \{(x,y,f(x,y));\ \forall (x,y) \in D\}$$
- implicitno: ploskev je ničelna množica f-je 3 spr.
let $F: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f-ja 3 spr.
$$P = \{(x,y,z) \in A;\ F(x,y,z) = 0\}$$

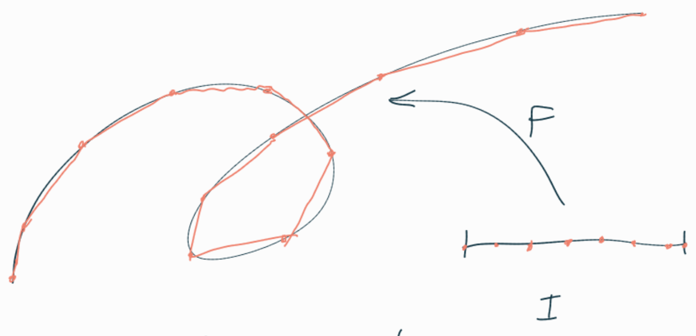
Primer: $x + y + z = 1$ (ravnina)
↳ $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$

Če so izpolnjeni pogoji izreka o implicitni f-ji za F, je ploskev lokalno v okolici dane točke graf funkcije 2 spr. nad eno od koordinatnih ravnin.

če za $(a,b,c) \in A$ $F(a,b,c) = 0$, $\nabla F(a,b,c) \neq 0$
$\Updownarrow$
eden od $\{F_x(a,b,c), F_y(a,b,c), F_z(a,b,c)\} \neq 0$,
recimo $F_x(a,b,c) \neq 0$, tedaj v okolici (a,b,c) lahko x izrazimo kot f-jo y,z.

$x = g(y,z)$ v okolici (b,c) in $g(b,c) = a$.

DOLŽINA LOKA in kako jo izmerimo.



z dodajanjem točk dobimo vse daljšo pot.

supremum dolžin poligonalnih aproksimacij je dolžina poti.

Def.: Naj $F:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ pot, $F=(\alpha,\beta)$. Izberimo delitev D intervala $[a,b]$, delilne točke: $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$

pot F na i-tem podintervalu $[t_{i-1},t_i]$ zamenjamo z daljico od $F(t_{i-1})$ do $F(t_i)$. Njeno dolžino znamo izračunati. Dolžina poligonalne krivulje, ki aproksimira F ...

$$\ell(D) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1}))^2+(\beta(t_i)-\beta(t_{i-1}))^2}$$

Dolžina poti F: $\ell(F) := \sup\limits_{D:\ \text{možne delitve } [a,b]} \ell(D)$

Pravimo, da je pot F izmerljiva, če $\ell(F)<\infty$

IZREK: Naj $F=(\alpha,\beta):[a,b]\to\mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot, takrat je vedno izmerljiva in njena dolžina je

$$\ell(F) = \int_a^b\sqrt{(\dot\alpha(t))^2+(\dot\beta(t))^2}\,dt$$

Ideja dokaza. D delitev

$$\ell(D) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1}))^2+(\beta(t_i)-\beta(t_{i-1}))^2} =$$

po Lagrangeu $\exists s_i \in [t_{i-1},t_i]$: $\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1}) = \dot\alpha(s_i)(t_i-t_{i-1})$

—||— $\exists u_i \in [t_{i-1},t_i]$: $\beta(t_i)-\beta(t_{i-1}) = \dot\beta(u_i)(t_i-t_{i-1})$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left((\dot\alpha(s_i))^2+(\dot\beta(u_i))^2\right)(t_i-t_{i-1})^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\dot\alpha(s_i))^2+(\dot\beta(u_i))^2}\,(t_i-t_{i-1})$$

↳ za zdaj possibly različni točki

$$R\left(\sqrt{\dot\alpha^2+\dot\beta^2}, D, T_D\right) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\dot\alpha(v_i))^2+(\dot\beta(v_i))^2}\,(t_i-t_{i-1})$$

Riemannova vsota

točke $\{v_i\}$

↳ isti točki

ampak za majhen interval je zaradi zveznosti $\dot\alpha$ in $\dot\beta$ $s_i \approx u_i$ (mahanje z rokami)

$\square$