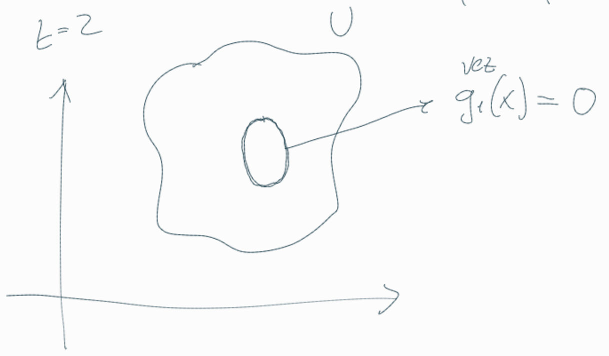
Izrek (vezani ekstrem):

Naj bo $U \subset \mathbb{R}^k$ odprta in $f, g_1, g_2, \dots, g_e$ $l<k$ zvezno odvedljive f-je na U. Kandidati za vezani ekstrem f pri pogojih $g_1(x)=0, \dots, g_e(x)=0$, $x \in U$ so stacionarne točke Lagrangeve funkcije



$F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_e) =$
$= f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_e g_e(x)$
in poleg teh st. tč.

še točke $x \in U$, v katerih vektorji $\nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \dots, \nabla g_e(x)$ niso linearno neodvisni

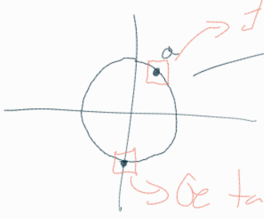
IZREK O IMPLICITNI FUNKCIJI

Za dano f-jo g dveh spremenljivk in tč. $a \in \mathbb{R}^2$, $a=(b,c)$, za katero velja $g(a)=g(b,c)=0$.

Zanima nas, pri katerih pogojih lahko množico rešitev enačbe $g(x,y)=0$ v okolici točke (b,c) zapišemo kot graf nad eno od koordinatnih osi.

sfera: $g(x,y) = x^2+y^2-r^2$ sfera

$\exists$ tako majhna okolica



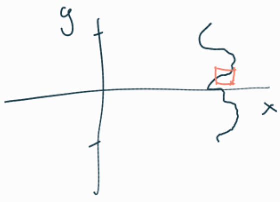
$g(x,y)=0 \Leftrightarrow x \in S(0,r)$

Če tako majhna okolica te točke ni, nikoli graf nad y-osjo, je pa graf nad x-osjo

2. primer: Naj f f-ja ene spremenljivke.

$g(x,y) = x - f(y)$

$g(x,y)=0 \Leftrightarrow x=f(y) \Leftrightarrow y=h(x)$



iščemo pogoj, pri katerem v okolici točke (x_0,y_0); $g(x_0,y_0)=0$ velja, da je množica rešitev grafa f-je nad abscisno osjo.

$y=h(x)$ v $\square$

ustrezen h pa je ravno inverz f.

f mora biti bijektivna, da ima inverz. Zadosten pogoj za to je stroga monotonost, torej mora biti odvod na $\square$ vedno enako predznačen.

Če je f zvezno odvedljiva v okolici točke c in je $f'(c) \neq 0$, potem je f' enakega predznaka še na neki okolici c (zveznost odvoda), zato je f na tej okolici strogo monotona $\Rightarrow$ injektivna $\Rightarrow$ $\exists$ inverz na okolici c

$\Rightarrow$ množica rešitev enačbe $g(x,y)=0 = x-f(y)$ v okolici točke $(f(c),c)$ graf nad abscisno osjo.

Za f-jo g pogoj $f'(c)=0$ pomeni, da je $g_y(b,c) \neq 0$.

Izkaže se, da je ta pogoj dovolj v splošnem.

IZREK o implicitni funkciji:

želimo $\nabla g(a) \neq 0$. zadosten pogoj
za to je $g_k(a) \neq 0$

Let g funkcija k spremenljivk, ki je r-krat zvezno odvedljiva v okolici točke $a \in \mathbb{R}^k$ za nek $r \geq 1$.

Če velja, da je $g(a)=0$ in $\boxed{\frac{\partial g}{\partial x_k}(a) \neq 0}$, (*)

zadnja spremenljivka

tedaj obstajajo okolica U točke $b=(a_1, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$
in okolica V točke $c = a_k$
ter r-krat zvezno odvedljiva f/a $h: U \longrightarrow V$
$k-1$ spremenljivk, za katero velja

(1) $h(b)=c$
(2) $\forall t \in U$ in $x_k \in V$ velja: $g(t, x_k) = 0 \Leftrightarrow h(t) = x_k$
(3) $\forall i = 1, \dots, k-1$ $\forall t \in U$ velja: $\frac{\partial h}{\partial t_i}(t) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(t, h(t))}{\frac{\partial g}{\partial x_k}(t, h(t))}$

$\neq 0$ (*)

DOKAZ: dokažimo obstoj h.

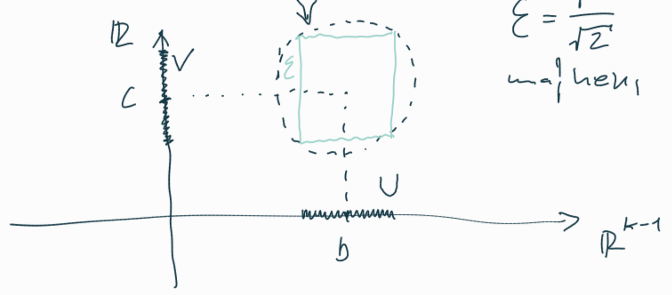
$x = (t, y) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}$

$t = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$, $y = x_k$

Po predpostavkah: $g(a) = 0$ in $g_y(a) \neq 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \\ 2\alpha$

BSŠ privzamemo $\alpha > 0$, sicer ~~zamenjamo~~ g z $-g$, kar ohrani gjevo ničelno množico

ker je g zvezno odvedljiva v okolici t. a, $\exists r > 0$, da je $g_y(x) > \alpha$ za vse $x \in K(a, r)$
↳ krogla



$\varepsilon = \frac{r}{\sqrt{2}}$ in $\gamma \in (0, \varepsilon)$ tako majhen, da za vse $t \in K(b, \gamma)$: $|g(t, c)| < \alpha \varepsilon$

$\Downarrow$
U

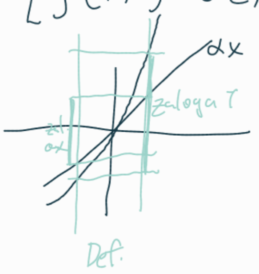
$V = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$

$g(b, c) = 0$, g je zvezna

(*)
Pokazali bomo: $\forall t \in U$ $\exists$ natanko en $y_t \in V$ $\ni$: $g(t, y_t) = 0$,

zato lahko definiramo $h: U \to V$
$t \longmapsto y_t$

Izberemo poljuben $t \in U$. f/ja $y \longmapsto g(t, y)$ je strogo naraščajoča na V, saj je $g_y(t, y) > \alpha$ (po predpostavki)
$\Rightarrow$ injektivna, zaloga vrednosti je $g(t, V) = [g(t, c-\varepsilon), g(t, c+\varepsilon)]$.
ta interval vsebuje interval $[g(t,c) - \alpha\varepsilon, g(t,c) + \alpha\varepsilon]$



Def.

interval $[\underbrace{g(t,c) - \alpha\varepsilon}_{<0}, \underbrace{g(t,c) + \alpha\varepsilon}_{>0}]$ vsebuje ničlo, zato ima g $y \mapsto g(t,y)$ na intervalu V ničlo, ki je ena sama. to smo želeli pokazati (*)
↳ strogo naraščajoča f/ja

S tem je dokazan obstoj h, ki ustreza (po konstrukciji) (1), (2).

dokazati je treba še, da h ustreza (3).

prej dokažimo, da je h vrat zvezno odv. na U.

Izberimo $t \in U$ in $s \in \mathbb{R}^{k-1}$ tako majhen, da daljica med t in $t+s$ leži v U.

Potem velja: $g(t, h(t)) = 0$ in $g(t+s, h(t+s)) = 0$

Definirajmo $G(v) = g(\underbrace{t+v\cdot s}_{\text{cela daljica od } t \text{ do } s \; \in \mathbb{R}^{k-1}}, \underbrace{h(t) + v\cdot (h(t+s) - h(t))}_{(1-v)h(t) + vh(t+s)})$, $v \in [0,1]$

$$G(0) = g(t, h(t)) = 0 \qquad G(1) = 0$$

G je zvezno odvedljiva v okolici $[0,1]$, ker je kompozitum množenja v s konstanto in zvezno odvedljive g.

Po Rolleu obstaja toč. v_0 na $(0,1)$, da je $G'(v) = 0$

$$\underbrace{G'}_{\text{verižno pravilo}}(\underbrace{v}_{\text{splošna toč. } v}) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t + vs, h(t) + v(h(t+s) - h(t))) \cdot s_i + \frac{\partial g}{\partial x_k}(\ldots, \ldots)(h(t+s) - h(t))$$

v točki V_0 velja $G'(V_0) = 0$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t + vs, h(t) + v(h(t+s) - h(t))) s_i + \frac{\partial g}{\partial x_k}(\ldots, \ldots)(h(t+s) - h(t)) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t + vs, h(t) + v(h(t+s) - h(t))) s_i = -\frac{\partial g}{\partial x_k}(\ldots, \ldots)(h(t+s) - h(t))$$

$$h(t+s) - h(t) = -\frac{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t + vs, h(t) + v(h(t+s) - h(t))) \cdot s_i}{\frac{\partial g}{\partial x_k}(t+vs, h(t+v(h(t+s) - h(t)))}$$

$$\lim_{s \to 0} -\frac{0 \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t + vs, h(t) + v(h(t+s) - h(t))) \cdot s_i \right.}{\text{omejeno} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_k}(t+vs, h(t+v(h(t+s) - h(t))) \right.} = 0$$

$$\lim_{s \to 0} h(t+s) - h(t) = 0 \quad (\text{zvezna je})$$

parcialno odvajamo po j-ti spremenljivki.

let $s = (0, 0, 0, \ldots, \underbrace{s_j}_{j\text{-to mesto}}, \ldots, 0, 0)$

$$h(t+s) - h(t) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x_j}(\cdot, \cdot) s_j}{\frac{\partial g}{\partial x_k}(\cdot, \cdot)}$$

$$\frac{h(t+s) - h(t)}{s_j} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x_j}(\cdot, \cdot)}{\frac{\partial g}{\partial x_k}(\cdot, \cdot)}$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{h(t+s) - h(t)}{s_j} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(t, h(t))}{\frac{\partial g}{\partial x_k}(t, h(t))} \quad \text{obstaja}$$

$\Downarrow$ $\quad \|$ (definicija h)

$$\lim_{s \to 0} \frac{h(t+s) - h(t)}{s_j} = \frac{\partial h}{\partial x_j}(t)$$

sedaj vemo, da je h zvezna in λx parcialno odvedljiva na vse spremenljivke ter da velja $h_{x_i}(t) = -\frac{g_{x_i}(t, h(t))}{g_{x_k}(t, h(t))}$ $\forall i = 1, \ldots, k-1$

iz te formule sledi, da so parcialni odvodi $h_{x_i}(t)$ zvezne f-je ker je $\frac{-\,\sim}{\sim}$ zvezna. za $r=1$ izrek velja.

kaj pa $r=2$? po predpostavki je g dvakrat zvezno odvedljiva.

h je 2x zv. odv.

$\Leftrightarrow$ h_{x_i} je zv. odv. kar je, ker je $-\frac{\sim}{\sim}$ zvezno odvedljiva po predpostavki. itd. za vsak r.

h_{x_i} je namreč zgolj kompozitum elementarnih funkcij (deljenje) in r-krat zvezno odvedljive f-je g.

OPOMBA: 1.) namesto k-te bi lahko izrek uporabili na drugih spremenljivkah, če je pogoj, da je $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \neq 0 \Rightarrow \nabla g(a) \neq 0$

čim je $\nabla g(a) \neq 0$, lahko na vsaj eni spremenljivki uporabimo izrek. V dokazu izreka o vezanem ekstremu smo predpostavili, da lahko množico rešitev zapišemo kot graf. Iz predpostavk v tistem izreku sledi, da je to vedno mogoče. $\hookrightarrow \nabla g(a) \neq 0$

Primer: Pokaži, da $e^{xy}+x+y=2$ določa f-jo $y=h(x)$ v okolici t. $(0,1)$ in določi taylorjev polinom stopnje 2 za f-jo h s središčem v 0.

točnega predpisa h ne znamo določiti, ker ne znamo izraziti y.

uporabimo izrek o implicitni f-ji.

$(0,1)$ reši enačbo: $e^{0\cdot 1}+0+1=2$ ✓
x y

$g(x,y)=e^{xy}+x+y-2$

- $g(0,1)=0$ ✓
- g zvezno odvedljiva? ✓ ja, g je gladka ($=\in C^\infty$)
- $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=e^{xy}x+1$

  $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)=1\neq 0$ ✓

po izreku $\exists$ gladka h: okolica $0 \to$ okolica 1 vemo $h(0)=1$ zavadi naše točke $(0,1)$

in velja $g(x,h(x))=0 \quad \forall x$ v okolici 0.

za y vstavi $h(x)$:

$$e^{xh(x)}+x+h(x)-2=0 \quad /'$$

$$e^{xh(x)}\left(h(x)+xh'(x)\right)+1+h'(x)=0 \qquad \text{vstavi } x=0$$

$$1(h(0)+0)+1+h'(0)=0 \Longrightarrow h'(0)=-2$$

$$e^{xhx} + x + hx - 2 = 0 \quad /''$$

$$e^{xhx}(hx + xh'x)^2 + e^{xhx}(2h'x + h''x) + h''x = 0$$

$$1 - 4 + h''(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad h''(0) = 3$$

$$T_{h,0,2}(x) = h(0) + h'(x)\,x + \frac{1}{2}h''(x)\,x^2 = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2$$

NOVO POGLAVJE: KRIVULJE in PLOSKVE

Podajanje krivulj: V kartezičnih koordinatah:

- eksplicitno: krivulja K je graf funkcije

  $f: I \to \mathbb{R}$

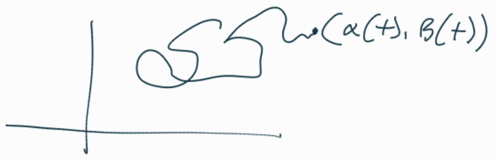
  $K = \{(x, f(x));\ x \in I\}$

- implicitno: K je podmn. tot množica rešitev enačbe $g(x,y) = 0$, kjer je $g: D^{\subset \mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ f-ja dveh spremenljivk

  $K = \{(x,y);\ g(x,y) = 0\}$

- parametrično: funkciji

  $\alpha, \beta: I^{\subset \mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$



$K = \{(\alpha(t), \beta(t));\ t \in I\}$