EKSTREMI f_i VEČ SPREMENLJIVK.

let f fja k-spremenljivk trikrat zvezno odvedljiva v okolici stac. tč. $a \in \mathbb{R}^k$. Za majhne $h \in \mathbb{R}^k$ velja:

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{\partial f(a)}_{=\vec{0}} \cdot h + \frac{1}{2}\left[\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 f\right](a) + R_{f,a,2}(h)$$

in $\exists\, C>0 \ni$: za vse dovolj majhne h:

$$|R_{f,a,2}(h)| \le C\|h\|^3.$$

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot h_i \cdot h_j}_{} + R_{f,a,2}(h)$$

↳ $Q(h)$ ~ „kvadratna forma", določena s hessejevo matriko

$$H(f,a) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) & \cdots & f_{x_1x_k}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) & \cdots & f_{x_2x_k}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_kx_1}(a) & f_{x_kx_2}(a) & \cdots & f_{x_kx_k}(a) \end{bmatrix}$$

in velja, če je $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix}$: $Q(h) = h^T H(f,a) h$

podobno kot pri fjah dveh spremenljivk je pomembno, kdaj je $Q(h) > 0 \ \forall h \neq 0$. tedaj ima f v a lok. min.
če je $Q(h) < 0 \ \forall h \neq 0$, tedaj ima f v a lok. maks.

Def.: let $H \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ simetrična matrika ($H = H^T$) in let $Q(h) = h^T H h \ \forall h \in \mathbb{R}^k$ pripadajoča kvadratna forma.

pravimo:
- ·) H je pozitivno semidefinitna, če je $Q(h) \ge 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^k$
- lok. min. → ·) H je pozitivno definitna, če je $Q(h) > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{0}\}$
- ·) H je negativno semidefinitna, če je $Q(h) \le 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^k$
- lok. maks. → ·) H je negativno definitna, če je $Q(h) < 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{0}\}$
- sedlo → ·) H je nedefinitna, če $\exists h_+, h_- \in \mathbb{R}^k \ni$: $Q(h_+) > 0$ in $Q(h_-) < 0$.

Izrek: (obstoj lok. ekstrema)

let fja f k spremenljivk 2krat zvezno odvedljiva v okolici stac. tč. $a \in \mathbb{R}^k$. let $H = H(f,a)$ hessejeva matrika f v tč. a.

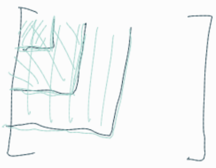
1.) H je pozitivno definitna $\Rightarrow$ f ima v a lok. min.
2.) H je negativno definitna $\Rightarrow$ f ima v a lok. maks.
3.) H je nedefinitna $\Rightarrow$ f v tč. a nima lok. ekstr.
4.) v drugih primerih na osnovi odvodov drugega reda ne moremo določiti, ali ima f v a lok. ekstr.

Opomba:
1) H je pozitivno (semi)definitna $\Leftrightarrow$ $-H$ je negativno (semi)definitna (očitno)
2.) H je pozitivno definitna $\Leftrightarrow$ H ima samo pozitivne lastne vrednosti.
3.) H je pozitivno definitna $\Leftrightarrow$ vsi njeni glavni minorji so pozitivni.

{simetrične matrike imajo vedno realne lastne vrednosti}

NTSQ: $f(x,y) = 0$?

↳ glavni minorji so det podmatrik:



recimo pri f-ah 2 spr gledamo 2 minorja, $f_{xx}(a)$ in $\begin{vmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) \end{vmatrix}$.

Primer: Določi lokalne ekstreme:

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} - \frac{8}{z}$$

$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R};\ x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0\}$

f je gladka ($\in C^\infty$), zato so vsi lok. ekstr. doseženi v stac. tč.

$$f_x(x,y,z) = 1 - \frac{y^2}{4x^2}$$
$$f_y(x,y,z) = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}$$
$$f_z(x,y,z) = \frac{8}{z^2} + \frac{2z}{y}$$

$y^2 = 4x^2$; $y = \pm 2x$

switch:

case $y = 2x$:

$\frac{z^2}{y^2} = 1 \quad z = \pm y$

case $y = -2x$:

×

switch

$z = y$: $2 + \frac{8}{z^2} = 0$ ×

$z = -y$: $-2 + \frac{8}{z^2} = 0 \Rightarrow z = \pm 2$

switch:

case $z = 2$:

$x = -1$

$y = -2$

case $z = -2$:

$x = 1$

$y = 2$

$N_1 = (-1,-2,2)$

stacionarni točki

$N_2 = (1, 2, -2)$

$$f_{xx}(x,y,z) = \frac{2y^2}{4x^3} = \frac{y^2}{2x^3}$$
$$f_{xy}(x,y,z) = -\frac{y}{2x^2}$$
$$f_{xz}(x,y,z) = 0$$
$$f_{yy}(x,y,z) = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}$$
$$f_{yz}(x,y,z) = -\frac{2z}{y^2}$$
$$f_{zz}(x,y,z) = \frac{2}{y} - \frac{16}{z^3}$$

$$H(f,(-1,-2,2)) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$H(f,(1,2,-2)) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

glavni minorji: $2,\ \boxed{2},\ -1\cdot 2 + 3\cdot 2 = 6 - 2 = \boxed{4}$

so vsi pozitivni. je poz. def. ⇒ $(1,2,-2)$ je lok. min.

ker je $H(f,(-1,-2,2)) = -H(f,(1,2,-2))$, je neg. def ⇒ lok. maks.

GLOBALNI EKSTREMI IN VEZANI EKSTREM

vemo: če je A kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}^k$ in če je $f: A \to \mathbb{R}$ zvezna f-ja k spremenljivk, potem f doseže minimum in maksimum.

ekstrem zvezne f-je na kompaktni množici lahko nastopi v notranji ali robni točki.

f ima v točki lok. ekstr.

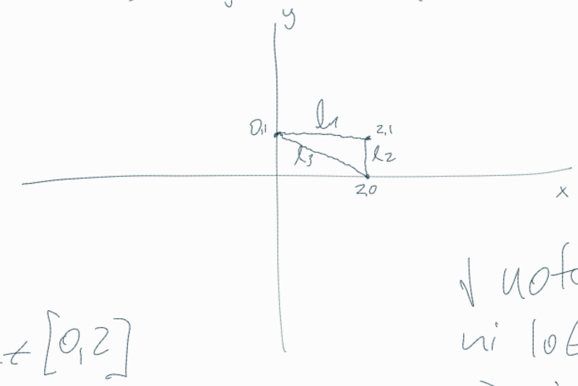
omejimo se na f-je 2 spr. in na A, katere rob je krivulja v ravnini. ekstreme f na robni krivulji rečemo „vezani ekstremi": krivulja predstavlja vez (= pog-j, ki mu morajo točke ustrezati)

Kako poiščemo grobalni ekstrem? Kandidati so točke v notranjosti A, ki so kandidati za lok ekstrem, in kandidati za ekstrem na robu. Med njimi z izračunom f-jskih vrednosti določim globalna ekstrema.

Primer: določi globalne ekstreme f/e dveh spremenljivk:

utssay: outvec, velnoč

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$ na zaprtem trikotniku $\{(2,0),(0,1),(2,1)\}$



$f_x(x,y) = 2x + y$ $\quad y = -2x$

$f_y(x,y) = x + 4y$ $\quad x - 8x = 0$

$x = 0$

$y = 0$

$(0,0) \notin D_f$

V notranjosti ni lok. ekstr.

$\Rightarrow$ ni glob. ekstr.

l_1: $y = 1$ $\quad x \in [0,2]$

$f(x,1) = x^2 + x + 2$

$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

teme v $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$,

strogo naraščajoča na $[0,2]$,

ekstrema sta v 0 in 2:

$f(0,1) = 2 \quad f(2,1) = 8$

kandidata: $(0,1), (2,1)$

$\downarrow f \quad \downarrow f$

$2 \quad 8$

l_2: $x = 2$, $y \in [0,1]$

$f(2,y) = 4 + 2y + 2y^2 = 2(2 + y + y^2) = 2\left(\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right)$,

ekstrema sta v 0, 1:

$f(2,0) = 4 \qquad f(2,1) = 8$

kandidata: $(2,0), (2,1)$

$\downarrow f \quad \downarrow f$

$4 \quad 8$

l_3: $y = kx + n$

$0 = k2 + n$

$1 = n$

$k = -\frac{1}{2}$ $\quad$ torej $y = -\frac{1}{2}x + 1$ $\quad x \in [0,2]$

$$f\left(x, -\frac{1}{2}x + 1\right) = x^2 + yx + y^2 =$$

$$= x^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)x + \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)^2 =$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1 =$$

$$= x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$\downarrow$

ničla v $\frac{1}{2}$

kandidati: $0, \frac{1}{2}, 2$

od prej $\quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \quad$ od prej

$\downarrow$

$1\frac{3}{4} \quad \frac{7}{4}$ kandidat za ekstr.

globalni maksimum 8 v $(2,1)$

globalni minimum $1\frac{3}{4}$ v $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

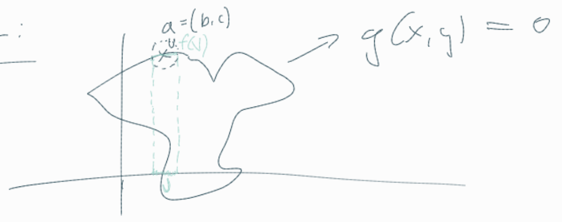
GLOBALNI EKSTREMI IN VEZANI EKSTREMI

Izrek (metoda Lagrangeovih multiplikatorjev):

Let $V \subset \mathbb{R}^2$ in $f, g \in C^1(V)$. Če ima f pri pogoju $g(x,y) = 0$ lokalni ekstrem v $(x_0, y_0) \in V$ in če je $\nabla G(x_0, y_0) \neq 0$, tedaj $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \ni$: (x_0, y_0, λ_0) stac. tč. fje $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$.

λ_0 imenujemo „Lagrangeev multiplikator/množitelj".

Dokaz:



dokažimo izrek v posebnem primeru, ko je mogoče množico rešitev $g(x,y) = 0$ v okolici U točke $a = (b,c)$ zapisati kot graf odvedljive fje $h: J \to \mathbb{R}$
interval
J vsebuje točko b.
Velja $h(b) = c$ in
$\forall (x,y) \in V: g(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = h(x)$

velja torej $g(x, h(x)) = 0 \ \forall x \in J$.
zato bomo iskanje lok. ekstr. fje f pri pogoju $g = 0$ na U prevedli na iskanje lok. ekstr. fje $H(x) = f(x, h(x))$ $x \in J$
ker je H odvedljiva fja ene spremenljivke, doseže lok. ekstr. na stac. tč. $H'(x) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}(\dots)}_{1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(x) =$

$= f_x(x, h(x)) + f_y(x, h(x)) \cdot h'(x)$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x)) = \frac{\partial g}{\partial x}(*) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}(*)}_{1} + \frac{\partial g}{\partial y}(*) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(x) =$$

$= \nabla f(x, h(x)) \cdot (1, h'(x)) = 0$ v stac. tč. $= g_x(x, h(x)) + g_y(x, h(x))\, h'(x) \quad \forall x \in J$

$\nabla g(x, h(x)) \cdot (1, h'(x)) = 0$
za vse $x \in J$

vektorja in sta
v stac. tč. oba pravokotna na $(1, h'(x))$, torej sta $\nabla f(x, h(x))$, $\nabla g(x, h(x))$ kolinearna

ker je x_0 stacionarna točka od H (izrek) in $y_0 = h(x_0)$
ker je $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ $\exists \lambda_0 \ni$: $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0) = 0$

TROMO (x_0, y_0, λ_0) je stac. tč. $F(x, y, \lambda)$.

prva komponenta tega

$F_x(x,y,\lambda) = f_x(x,y) + \lambda \cdot g_x(x,y)$

$F_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) + \lambda \cdot g_y(x,y)$

$F_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y)$

$F_x(x_0, y_0, \lambda_0) = \overbrace{f_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \cdot g_x(x_0, y_0)}$

$F_y(x_0, y_0, \lambda_0) = f_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \cdot g_y(x_0, y_0)$ druga komponenta tega

$F_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = g(x_0, y_0) = 0$

↳ točka na krivulji.
↳ pogoj iz izreka.

opomba: Kandidati za ekstreme fje f pri pogoju g so torej:

- točke, kjer f ali g nista v C^1.
- točke, kjer $\nabla g = 0$.
- stacionarne točke fje $f+\lambda g$ (oz. prvi dve komponenti)

Primer: določi globalne ekstreme fje $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ na krivulji $x^2+y^2=2x \longrightarrow g(x,y) = x^2-2x+y^2$

$g_x(x,y) = 2x-2 \quad x=1$

$g_y(2y) = 2y \quad y=0$

$(1,0) \quad g(1,0) = -1$

↳ ne leži na krivulji.

stac. tč. od $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^3 - 3xy^2 + \lambda(x^2-2x+y^2)$

$F_x(x,y,\lambda) = 3x^2 - 3y^2 + 2\lambda x - 2\lambda$

$F_y(x,y,\lambda) = -6xy + 2\lambda y = y(-6x+2\lambda) = 0$

$F_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 - 2x + y^2$ } vez

N: $y=0$: $x^2-2x=0 \quad x(x-2)=0 \quad x=0$, $x=2$

$\lambda = 3x$

...

$(1,1), (1,-1)$

$(0,0)$

$(2,0)$

funkcijske vrednosti in najdemo glob. ekstrema.