VERIŽNO PRAVILO

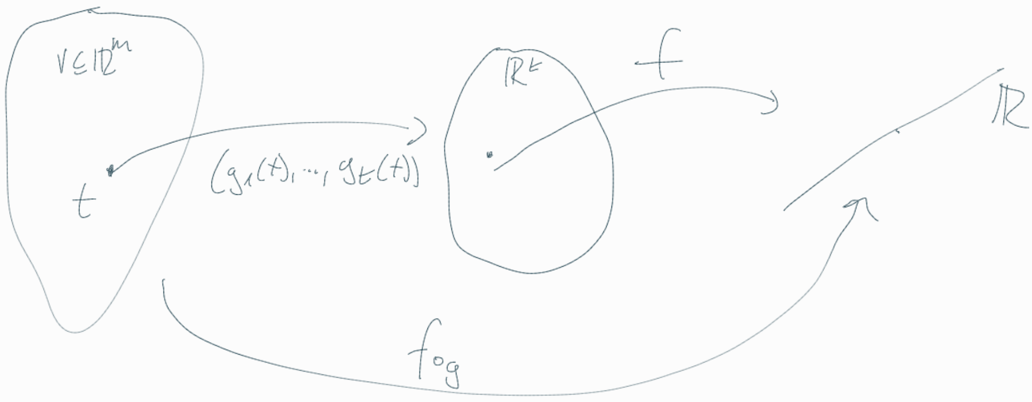
$f\circ g \longrightarrow (f\circ g)'=\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(g(x))\cdot g_l'(x)\right)$

Posledica: Let $g_1,\dots,g_k: V\to\mathbb{R}$ diferenciabilne fje m spremenljivk, definirane na odprti množici $V\subseteq\mathbb{R}^m$.

označimo $U=\{g(t)=(g_1(t),g_2(t),\dots g_k(t));\ t\in V\}$

↳ zaloga vrednosti g.

Let $f: U\to\mathbb{R}$ diferencialna fja. skica:



Potem je $F(t)=f(g(t))$ diferenciabilna fja, def na V.

za vse $j=1..m$ $\quad \frac{\partial F}{\partial t_j}=\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(g(t))\cdot\frac{\partial g_l}{\partial t_j}(t)\right)$

EKSTREMI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK.

• LOKALNI EKSTREMI: vemo:

· f ima v a lokalni minimum, če je v a funkcijska vrednost f glede na okolico a najmanjša.

· f s k spremenljivkami ima lokalni ekstrem v točki a

$\implies$ lokalni ekstrem imajo v a tudi vse koordinatne funkcije oblike $K_{f,i}(x)=f(a_1,a_2,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n)$

TRDITEV: Let f definirana v okolici tč. $a\in\mathbb{R}^k$. Če ima f v a lokalni ekstrem, potem so vsi parcialni odvodi v točki a, ki obstajajo, enaki 0.

zato $\forall i$ bodisi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0$ bodisi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\nexists$

· kandidati za lokalne ekstreme fje k spremenljivk so torej take točke, v katerih je vsak prvi parcialni odvod 0 ali ne obstaja.

DEFINICIJA: Let f diferenciabilna fja k spremenljivk v okolici $a\in\mathbb{R}^k$. Če velja, da so vsi parcialni odvodi f v a enaki 0, je a stacionarna/kritična točka f.

opomba: kaj vemo za stac. točke? v stac. točki je $df(a)=0$ in $\nabla f(a)=0$

seveda ni nujno, da je stacionarna točka lokalni ekstrem.

PRIMER: Let $p\in\mathbb{R}$ in $f(x,y)=x^2+py^2$. najdi lokalne ekstreme f!

Iščimo kandidate za ekstreme: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x \quad (=0\iff x=0)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2py \quad (=0\iff p=0 \lor y=0)$

switch:

case $p=0$:

stac. točke so $\{(0,y) ; y \in \mathbb{R}\}$.

a je ekstrem? $f(x,y) = x^2 \geq 0$

$f(0,y) = 0$ $\quad 0 \leq x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Ja. v teh točkah je lokalni minimum.

case $p \neq 0$:

stac. točka je $(0,0)$.

a je ekstrem $f(0,0) = 0$

$f(x,y) = x^2 + py^2$

$p > 0 \iff (0,0)$ je ekstrem

$p < 0$ $\quad a^2 := -p$

$f(x,y) = x^2 - a^2y^2$ ups!

v $(0,0)$ je stac. točka „SEDLO"

$f(0,y) < 0$ $\quad$ NI LOKALNI EKSTREM

$f(x,0) > 0$

Iščemo zadostne pogoje za lokalni ekstrem

pri fjah ene spremenljivke je v stac. točki lokalni lok. ekstr., če je 2. odvod $\neq 0$. predznak 2. odv. pa pove.

Naj bo f dveh spremenljivk trikrat zvezno odvedljiva v okolici točke a. (da $\exists$ parcialni odvodi 3. reda v okolici a in so zvezni).

Potem velja Taylorjeva formula za majhne $h = (u,v)$

je $f(a+h) = f(a) + df(a)\cdot h + \frac{1}{2!}\left(u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2uv \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a) + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right) +$

$+ R_{f,a,2}(h)$

Če je a stac. tč. od f, potem velja:

$\Delta f := f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\big(u^2 \underbrace{f_{xx}(a)}_{A} + 2uv \underbrace{f_{yx}(a)}_{B} + v^2 \underbrace{f_{yy}(a)}_{C}\big)$

$+ R_{f,a,2}(h)$

N.T.S.:

SCE

Q v /d

Q $R_{a,2}(h)$

označimo

$Q(u,v) = u^2 A + 2uvB + v^2 C$

Po izreku imamo oceno za ostanek v kompaktni okolici točke a, torej $h \in \overline{K}(\vec{0}, r)$

zaprt krogec s središčem in radijem

Po Taylorjevem izreku $\exists\, l \in \mathbb{R} : |R_{a,2}(h)| \leq l\|h\|^3$, $h \in \overline{K}(0,r)$

za dovolj majhne h ($\ll 1$) prevlada po velikosti $Q(u,v)$ napram $|R_{a,2}(h)|$.

Če je $Q(h) = 0 \ \forall h$ (parcialni odvodi so 0), ne pove ničesar o Δf.

drugače: case: $A = C = 0$. $\quad Q(u,v) = 2Buv$

tedaj Q na vsakem krogu doseže + in − vrednosti. torej lok. ekstrema ni.

case: $A \neq 0$: $\quad Q(u,v) = \frac{1}{A}(A^2u^2 + 2ABuv + ACv^2) =$

$= \frac{1}{A}\left((Au+Bv)^2 - B^2v^2 + ACv^2\right) =$

$= \frac{1}{A}\left((Au+Bv)^2 + v^2(AC - B^2)\right)$

let $D := AC - B^2$

switch:

case $D>0$:

tedaj $\operatorname{sign}(Q(h)\,\forall h)=\operatorname{sign}(A)$

$A>0 \Rightarrow Q(h)\,\forall h \geq 0 \Rightarrow$ pričakujemo, da ima f v a lokalni minimum

enačaj je dosežen samo v $h=(0,0)$.

$A<0 \Rightarrow Q(h)\,\forall h \leq 0 \Rightarrow$ pričakujemo, da ima f v a lok. maksimum.

kar ni pomembno, ker je tedaj $\Delta f(a)=0$

case $D<0$:

tedaj Q v vsaki okolici $(0,0)$ doseže tako pozitivne kot negativne vrednosti $\Rightarrow$ ni lokalni ekstrem.

$\hookrightarrow \operatorname{sign}(Q(u,0))=\operatorname{sign}(A)$

$\hookrightarrow \operatorname{sign}\left(Q\left(\frac{-Bv}{A},v\right)\right)=\operatorname{sign}(-A)$

ups, za male h imamo tiv- vrednosti za h okoli 0.

case $D=0$: $Q\left(\frac{-Bv}{A},v\right)=0$ za vse v, zato predznak Δf določa $R_{f,a,2}$!

Izrek: obstoj lokalnega ekstrema:

Naj f dvakrat ~~zvezno~~ diferenciabilna v okolici stac. tč. $a\in\mathbb{R}^2$. Označimo $f_{xx}(a)=A$, $f_{yx}(a)=B$, $f_{yy}(a)=C$,
$D=AC-B^2$.

(i) če je $D>0$ in $A>0$, ima f v a lok. min.

(ii) če je $D>0$ in $A<0$, ima f v a lok. maks.

(iii) če je $D<0$, f nima lok. ekstr. v a.

(iv) če je $D=0$, odvod drugega reda ne opisuje obstoja lok. ekstrema f v tč. a.

Dokaz za trikrat zvezno diferenciabilne fje:

$\Delta f=\frac{1}{2}Q(u,v)+R_{a,2}(u,v)$ in za dovolj majhen $r>0$ $\exists l\in\mathbb{R} \ni$:

$|R_{a,2}(h)|\leq l\|h\|^3$

(i) $D>0 \land A>0$. vemo: $Q(h)\geq 0 \;\forall h\in\mathbb{R}$

$Q(h)=0 \Leftrightarrow h=(0,0)$

ker je Q zvezna fja na kompaktni množici (enotski krožnici), na njej doseže minimum $m>0$.

izberimo $h\neq(0,0)$, potem $\frac{h}{\|h\|}$ leži na enotski krožnici. $Q(h)=Au^2+2Buv+Cv^2=$

$$=\|h\|^2\left(A\frac{u^2}{\|h\|^2}+2B\frac{u}{\|h\|}\frac{v}{\|h\|}+C\frac{v^2}{\|h\|^2}\right)=$$

$$=\|h\|^2 Q\left(\frac{u}{\|h\|},\frac{v}{\|h\|}\right)\geq\|h\|^2 m$$

$$\Delta f\geq\frac{1}{2}m\|h\|^2+R_{a,2}(h)\geq\frac{1}{2}m\|h\|^2-l\|h\|^3=$$

$$=\|h\|^2\left(\frac{1}{2}m-l\|h\|\right)>0$$

$h\in K(0,r)$ za dovolj majhen $\tilde{r}$.

$\geq 0 \;\forall h$

$\Rightarrow \Delta f\geq 0 \;\forall h$ iz dovolj majhnega kroga okoli a.

torej lokalni minimum.

(ii) dokaz podoben (i)

(iii) bolj očitno

(iv) najdi protiprimera:

$f(x,y) = x^3 + y^2$

$f_x(x,y) = 3x^2$

$f_y(x,y) = 2y$

$f_{xx}(x,y) = 6x$

$f_{xy}(x,y) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 2$

stac. točka $(0,0)$

$A=0$, $B=0$, $C=2$, $D=0$

$f(x,0) = x^3$ nima lok. ekstrema.

$f(x,y) = x^4 + y^2$

$f_x(x,y) = 4x^3$

$f_y(x,y) = 2y$

$f_{xx}(x,y) = 12x^2$

$f_{xy}(x,y) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 2$

stac. točka $(0,0)$

$A=0$, $B=0$, $C=2$, $D=0$

$x^4 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$, zato je $(0,0)$ lok. min.

HESSEJEVA MATRIKA

Def.: Naj f dvakrat zvezno odvedljiva v a. Hessejeva matrika f v tč. a je

$$H(f,a) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

$$\det H(f,a) = D$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au+Bv \\ Bu+Cv \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [u \ v]\begin{bmatrix} Au+Bv \\ Bu+Cv \end{bmatrix} = u(Au+Bv) + v(Bu+Cv) =$$

$$= Au^2 + Buv + Buv + Cv^2 = Au^2 + 2Buv + Cv^2 =$$

$$= Q(h)$$

$$Q(h) = \vec{h}^T H(f,a) h$$

Posledica: Naj f dvakrat spr. dvakrat zvez. odv. v okol. tč. $a \in \mathbb{R}^2$.

f ima f ima v a lok. ekstr. $\Leftarrow$ $\det H(f,a) > 0$

v tem primeru je v a lok. min, če je njena sled pozitivna in lok. maks., če je njena sled negativna.

$\boxed{\text{sled matrike je vsota } a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} \text{ (diag. el.)}}$

DEMIMO, DA JE f trikrat zvezno diferenciabilna v okolici stac. tč. $a \in \mathbb{R}^k$.

$$\Delta f := f(a) - f(a+h) = \underbrace{df(a)h}_{=0} + \frac{1}{2}\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 f\right](a) + R_{a,2}(h)$$

na $\bar{K}(0,r)$ $\exists$ $l \in \mathbb{R}$: $|R_{a,2}(h)| \leq l\|h\|^3$

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{k} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}$$

kvadratna forma $Q(h)$ je spet določena s Hessejevo matriko:

$$H(f,a) = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(a) & f_{x_1 x_2}(a) & \cdots & f_{x_1 x_k}(a) \\ f_{x_2 x_1}(a) & f_{x_2 x_2}(a) & \cdots & f_{x_2 x_k}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_k x_1}(a) & f_{x_k x_2}(a) & \cdots & f_{x_k x_k}(a) \end{bmatrix}$$

če je $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix}$, je

$$Q(h) = h^T H(f,a) h$$