Zveznost fj več spremenljivk:

PRIMER:

$$f(x,y) = \sin \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

komponiranje, $+,-,\cdot,\div$ zveznih fj mnogo spremenljivk
navadi zvezno fj. - f^{-1} je redko smiselno, ker so fje oblike $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in so redko bijektivne

Sin je zvezna. dovolj je dokazati zveznost

$$(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$$

dovolj je dokazati hkratno zveznost števca in imenovalca:

$(x,y) \mapsto xy$ zvezna in $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ zvezna

saj je produkt zveznih:

- $(x,y) \mapsto x$
- $(x,y) \mapsto y$

saj je sum zveznih

[ODVODI fj VEČ SPREMENLJIVK]

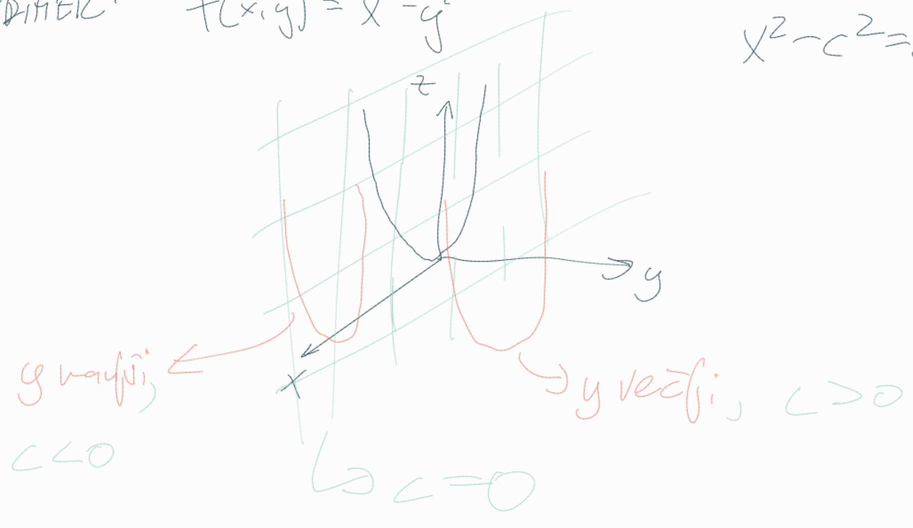
↳ [PARCIALNI ODVODI]

najprej za $k=2$

$D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \quad f: D_f \to \mathbb{R}$ graf take fje je ploskev v prostoru

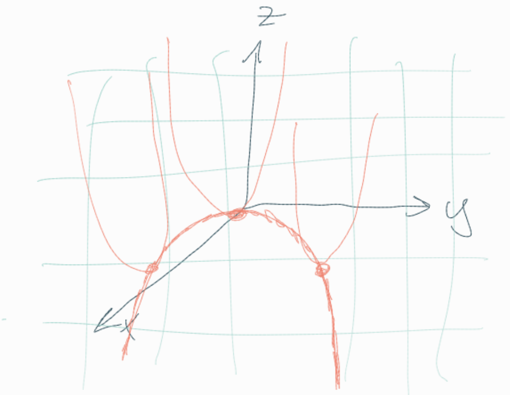
graf presekamo z ravnino $y=c$, v tej ravnini dobimo graf fje $x \mapsto f(x,c)$

PRIMER: $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\qquad x^2 - c^2 = z$



Podobno, če presekamo graf f z ravnino $x=b$, dobimo graf $y \mapsto f(b,y)$,

za $b=0$: $z = -y^2$



parcialni odvod je odvod take zožene funkcije ene spremenljivke, ki jo dobimo tako, da fiksiramo preostale izmed spremenljivk funkcije f na konstante.

Definicija.
Naj $U \subset \mathbb{R}^k$ okolica točke a in $f: U \to \mathbb{R}$

parcialni odvod f v točki a po x_i, kjer $i = 1, \dots, k$, je odvod funkcije ene spremenljivke (koordinatna):

$$x_i \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_k)$$

v točki a_i. oznaka $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

opomba: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(\dots, x_i, \dots) - f(a)}{x_i - a_i}$

opomba: f parcialno odvajamo na x_i tako, da vse druge fiksiramo in nato odvajamo tot f/o ene spremenljivke x_i.

$$\begin{cases} \text{osebna razlaga: za f/o } f \text{ definiramo} \\ \hat{f}(x_i) = f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_k) \\ \text{in nato odvajamo } \hat{f}(x_i). \end{cases}$$

Primer: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

izračunaj $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

cases: let $(x,y) \neq (0,0)$

odvod po x: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y = y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

konstanta y

odvod po y: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

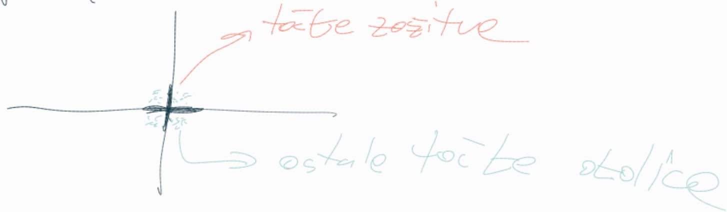
konst x

case $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Simetrično velja $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
(za to f/o)

... iz zapisa od prej vemo, da f ni zvezna v $(0,0)$, ker $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \notin \mathbb{R}$, ima pa parcialne odvode povsod na ravnini: parcialni odvodi so odvisni le od zožitve ($x=c$ ali $y=c$), zožitev na to premico pa je le majhen del okolice f v $(0,0)$. Za zveznost pa je potrebna cela okolica.



oznake: $\frac{\partial f}{\partial x_i} \sim f_{x_i} \sim \partial_{x_i} f \sim \partial_i f$

[PARCIALNI ODVODI VIŠJEGA REDA]

Parcialni odvod dane f-je f je spet f-ja in če je parcialno odvedljiva, njene parcialne odvode imenujemo parcialni odvodi drugega reda.

Primer: za $k=2$; $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ $f: D_f \to \mathbb{R}$.

$f = f(x,y)$.

če je f_x parcialno odvedljiva po x, ta parcialni odvod označimo z f_{xx} in ga imenujemo drugi parcialni odvod f-je f po x.

če je f_x parcialno odvedljiva po y, je ta parcialni odvod imenovan „drugi parcialni odvod f-je f najprej po x in nato po y" in označen z f_{xy}.

Pazi: $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}$; $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_y \partial_x f$

Če so vsi parcialni odvodi 2. reda po vseh spremenljivkah definirani, jih je k^2.

Podobno definiramo parcialne odvode višjih redov.

PRIMER: f-ja dveh spremenljivk: $f(x,y) = xe^{xy}$.

izračunaj vse parcialne odvode 2. reda.

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} = (1+xy)e^{xy}$$
konst.

$$f_y(x,y) = x\,xe^{xy} = x^2 e^{xy}$$
konst.

$$f_{xx}(x,y) = ye^{xy} + (1+xy)ye^{xy}$$
konst.

SIMETRIJA SPREMENLJIVK

MEŠANI ODVOD

$$f_{xy}(x,y) = xe^{yx} + (1+yx)xe^{yx} = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}$$
konst.

pod določenimi pogoji sta mešana parcialna odvoda enaka.

$$f_{yx}(x,y) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}$$
konst

$$f_{yy}(x,y) = x^2xe^{xy} = x^3e^{xy}$$
konst.

[DIFERENCIABILNOST in TOTALNI DIFERENCIAL]

linearna aproksimacija

Glejmo $f: D_f \to \mathbb{R}$

$D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, D_f je okolica točke $a=(b,c) \in \mathbb{R}^2$

Recimo, da je f v a na obe spremenljivki diferenciabilno odvedljiva.

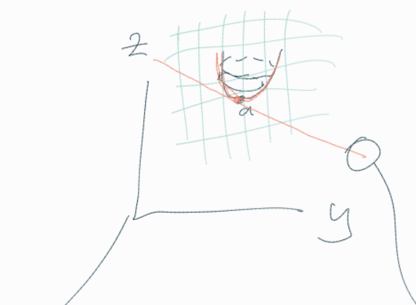
Tedaj sta f_j: 1.) $x \mapsto f(x,c)$ in
2.) $y \mapsto f(b,y)$ odvedljivi po def. parc. od.

1.) v b
2.) v c

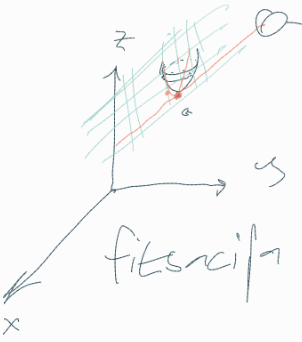
zato lahko ofunk zožitvi aproksimiramo s tangentama.

Fjo $x \mapsto f(x,c)$ aproksimiramo s premico

$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-b)$$



fiksacija $x=b$



fiksacija $y=c$

ti dve premici stozi točko $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^3$ določata ravnino

imenujemo jo tangentna ravnina.

$$z = \underbrace{f(a)}\ + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a)}(x-b) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a)}(y-c)$$

odvisne od a

- kako dobro tangentna ravnina aproksimira graf v okolici a!

$$f(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot(x-b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot(y-c) + R$$

napaka.

pri fjah 1 spr. je diferenciabilna takrat, ko je na okolici dobro predstavljiva z diferencialom

pišemo: $h = (u,v) = (x,y) - a = (x-b, y-c)$

$$R_a(x,y) = R_a(a+h) = f(a+h) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)u - \frac{\partial f}{\partial y}(a)v$$

Def.: let $f: D_f \to \mathbb{R}$
$\hookrightarrow$ okolica $a=(b,c) \in \mathbb{R}^2$

Pravimo, da je f odvedljiva/diferenciabilna v a, če velja, da je $\lim\limits_{h \to (0,0)} \frac{R_a(a+h)}{\|h\|} = 0 \qquad (*)$

Opomba: pogoj $(*)$ je ekvivalenten:

$$\lim_{(x,y)\to a} \frac{R_a((x,y))}{\|(x,y)-a\|} = \lim_{(x,y)\to a} \frac{R_a((x,y))}{\|(x,y)-(b,c)\|} = \lim_{(x,y)\to a} \frac{R_a((x,y))}{\sqrt{(x-b)^2-(y-c)^2}}$$

Definicija: če je f diferenciabilna v a, potem linearno preslikavo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ki je dana s predpisom $(u,v) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)u + \frac{\partial f}{\partial y}(a)v$ imenujemo diferencial f v točki a in jo označimo z $df(a)$.

opomba: $(df(a))(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

Def2.: če je f diferenciabilna v a, potem vektor parcialnih odvodov $(f_{x_1}(a), \dots, f_{x_n}(a))$ imenujemo gradient funkcije f v točki a in ga označimo z $\nabla f(a)$.

OPOMBA: s pomočjo diferenciala lahko pogoj (*) zapišemo tudi takole:

$$\lim_{h \to \vec{0}} \frac{f(a+h) - f(a) - (df(a))(h)}{\|h\|}$$

Definicija za mnogo spremenljivk: Let $f: D_f \to \mathbb{R}$
↳ okolica $a \in \mathbb{R}^k$

naj bo f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v točki a.

- če je $$\lim_{h=(h_1,\dots,h_k) \to \vec{0}} \frac{f(a+h) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\cdot h_k}{\|h\|} = 0$$

⇒ potem je f odvedljiva/diferenciabilna v a.

- v tem primeru je totalni diferencial f-je f v tč. a

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,dx_k$$

Vrednost diferenciala f-je f na vektorju h je

$$df(a)\cdot h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\cdot h_k =$$

$= \nabla f(a) \cdot h$, kjer je $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right)$

↳ „gradient f v točki a)

↳ skalarni produkt

oz.

$$\nabla f(a) \times h^T$$

↓ matrično množenje

TRDITEV: Če je f-ja več spremenljivk v neki točki diferenciabilna, potem je v tej točki zvezna.

DOKAZ: f je def. v okolici $a \in \mathbb{R}^k$. Vemo, da je

$$\lim_{h \to \vec{0}} \frac{f(a+h) - f(a) - df(a)\cdot h}{\|h\|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to \vec{0}} f(a+h) - f(a) - df(a)\cdot h = 0 =$$

$$= \left(\lim_{h \to \vec{0}} f(a+h)\right) - f(a) + 0 = 0$$

$\Rightarrow \lim_{h\to\vec{0}} f(a+h) = f(a)$ } karakterizacija zveznosti.

opomba: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; x \neq (0,0) \\ 0 & ; x = (0,0) \end{cases}$

ni zvezna v $(0,0)$, je pa tam parcialno odvedljiva,
zato po trditvi ni diferenciabilna.

POSLEDICA: 1.) Obstoj parcialnih odvodov ni zadosten pogoj niti za zveznost niti za diferenciabilnost.

2.) primer: $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ je def na $\mathbb{R}^2$, je elementarna, zato na $\mathbb{R}^2$ zvezna.

OBRAVNAVAJ OBSTOJ PARCIALNIH ODV. IN DIFERENC. V $(0,0)$.

$f(x,0) = 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$f(0,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Diferenciabilnost v $(0,0)$?:

$$\lim_{h\to\vec{0}} \frac{f(h) - f(\vec{0}) - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0})}^{=0} h_1 - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0})}^{=0} h_2}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h\to\vec{0}} \frac{\sqrt[3]{h_1 h_2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \neq 0$$

Vzamimo $h_2 = h_1$:

$$\frac{\sqrt[3]{h_1^2}}{\sqrt{2h_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} h_1^{-1/3}$$

∞, če gre h_1 proti 0

očig. limita ni 0.

ta fija je zvezna, ima parcialne odvode, a ni diferenciabilna.

IZREK: let $f: D_f \to \mathbb{R}$ (D_f okolica $a \in \mathbb{R}^k$), f parcialno odvedljiva v vseh spremenljivkah v okolici točke $a \in \mathbb{R}^k$.

Če so vsi parcialni odvodi v točki a zvezni, je f diferenciabilna v točki a.

DOKAZ za $k=2$:

$f(a+h) - f(a) = f(b+u, c+v) - f(b,c) =$

$a = (b,c)$, $h = (u,v)$

$= \big(f(b+u, c+v) - f(b+u, c)\big) + \big(f(b+u, c) - f(b,c)\big)$

$y \mapsto f(b+u, y)$ $\qquad$ $x \mapsto f(x,c)$

Lagrangev izrek

$= \frac{\partial f}{\partial y}(b+u, c^*)(c+v-c=v)$, $c^* \in (c, c+v)$ $\qquad$ $= \frac{\partial f}{\partial y}(b^*, c)(u)$