ANAIVFMF2023-12-22

[ROLLEOV IN LAGRANGEOV IZREK]

let: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna, odvedljiva na (a,b).

Rolle: $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists \alpha \in (a,b) \ni: f'(\alpha)=0$

Lagrange: $f(b)-f(a) = (b-a) \cdot f'(\alpha)$; $\exists \alpha \in (a,b)$

N

let $p(x)$ neničeln polinom $\mathbb{R}[x]$ in s samimi ničlami $\in \mathbb{R}$.
Dokaži, da ima tudi $p'(x)$ samo realne ničle!

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$= a(x-n_1)(x-n_2)\cdots(x-n_s)$$ $\vec{n}$ so ničle. s je stopnja

Če velja p neničeln polinom in ima realne ničle, ni konstanten.
Če $s=1$, potem je odvod tak, da ima same realne ničle.
Če so vse ničle enostavne, po rollovem izreku
dobimo vsaj $s-1$ realnih ničel v odvodu, (očitno?)
ko gledamo intervale $[n_1,n_2],[n_2,n_3],[n_3,n_4],\dots$.
p' je stopnje $s-1$, torej ima $s-1$ ničel. $s-1$ ima realnih,
torej so vse realne.

SPLOŠEN PRIMER:

torej $p(x) = a(x-n_1)^{b_1}(x-n_2)^{b_2}\cdots(x-n_k)^{b_k}$ $\quad k \leq s$

$$\sum b = s$$

Po rollovem izreku ima p' vsaj $k-1$ ničel, ko
gledamo intervale $[n_1,n_2],[n_2,n_3],[n_3,n_4],\dots$
potrebujemo še nekaj ničel, saj jih potrebujemo $s-1$.
V dvojnih, trojnih, četvornih, ... ničlah ima tudi
odvod $n-1$-tro ničlo.

razbijemo produkt: $p(x) = a(x-n_{\pi_1})(x-n_{\pi_2})\cdots q_1(x)$

tiste ničle, ki so
v p bile mnogoteve, so
zdaj v $q_1(x)$ (mnogo−1)-teve.
$q_1(x)$ ima po volji za
svoje enojne ničle štEnojnihNičel−1
ničel. Razbijamo dalje q_1 v

$$q_1(x) = a(x - n_{\pi_{11}})^1 (x - n_{\pi_{12}})^1 \dots q_2(x)$$

in ponavljamo na q_2 razbijanje
itd ......

q_i nam pove da
n−k preostalih ničel.

hmmm, to ne dokaže trditve
v celoti! TODO

N

let $f: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva na $(1,2)$.
velja $f(2) = 2f(1)$
Dokaži, da $\exists \alpha \in (1,2) \ni: f'(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$

vzemimo $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. je zvezna na $[1,2]$ in odvedljiva
na $(1,2)$.

$$g(1) = f(1)$$
$$g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{\cancel{2}f(1)}{\cancel{2}} = f(1)$$

na g lahko uporabimo rolleov izrek.

$$\exists \alpha \in (1,2) \ni: g'(\alpha) = 0$$

izračunajmo $g'(\alpha)$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

če vstavimo α

$$\frac{f'(\alpha)\alpha - f(\alpha)}{\alpha^2} = 0$$

$$\frac{f'(\alpha)\alpha}{\alpha^2} = \frac{f(\alpha)}{\alpha^2}$$

$$f'(\alpha)\alpha = \frac{f(\alpha)}{\cancel{\alpha^2}} \cancel{\alpha^2}$$

$$f'(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

to smo hoteli

dokazati.

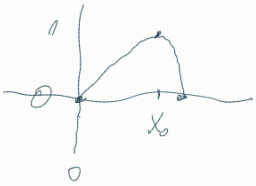
N

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva na $(0,1)$ in

$f(0)=f(1)=0$ ter $1\in Z_f$.

Dokaži, da $\exists\,\alpha\in(0,1)\ \ni: |f'(\alpha)|>2$

recimo:



$x_0\in(0,1)$

$f(x_0)=1$

uporabimo Lagrangev izrek na intervalih $[0,x_0]$ in $[x_0,1]$

$$\underbrace{f(x_0)-f(0)}_{1}=(x_0-0)f'(\alpha) \quad \text{za nek } \alpha\in(0,x_0)$$

$$1=x_0 f'(\alpha)$$

$$\frac{1}{x_0}=f'(\alpha)$$

$$x_0<\frac{1}{2}\Rightarrow f'(\alpha)>0$$

sicer pogledamo drug interval — $(x_0,1)$:

$$\underbrace{f(1)-f(x_0)}_{-1}=(1-x_0)f'(\alpha) \quad \text{za nek } \alpha\in(x_0,1)$$

$$-1=f'(\alpha)$$

$$\frac{-1}{1-x_0}=f'(\alpha)$$

če $x_0>\frac{1}{2}\Rightarrow 1-x<\frac{1}{2}\Rightarrow f'(\alpha)<-2\Rightarrow|f'(\alpha)|>2$

kaj pa $x_0=\frac{1}{2}$?

1.) $\exists\,\alpha_1\in(0,\frac{1}{2})\ \ni: f'(\alpha_1)=2$

2.) $\exists\,\alpha_2\in(\frac{1}{2},1)\ \ni: f'(\alpha_2)=2$

Radi bi dobili $f'(\alpha_1)>2$ za $\alpha_1\in(0,\frac{1}{2})$

ali $f'(\alpha_2)<-2$ za $\alpha_2\in(\frac{1}{2},1)$

pred postavimo, da to ni res (RA):

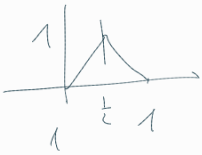
$$\boxed{\forall x\in(0,\tfrac{1}{2}) \quad f'(x)\leq 2}$$

natanko bi bilo fino dokazati, da ni ...

$\boxed{\forall x \in (\tfrac{1}{2}, 1) \quad f'(x) \geq -2}$

dokaži ... odvedljiva.

edina točka je



, ki ni odvedljiva.

NTS + dokaži to

$f'_+(\tfrac{1}{2}) = 2$

$f'_-(\tfrac{1}{2}) = -2$

$f'(\tfrac{1}{2}) \nexists$

N

Dokaži naslednje neenakosti:

a) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

b) $\sin x < x \quad \forall x > 0$

c) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad \forall x > 0$

a) $x = y$: $|\arctan x - \arctan y| = |x-y|$

BŠS: zaradi abs vrednosti: $x < y$: Lagrange: arctan je odvedljiva

$$\arctan x - \arctan y = (x-y)\arctan' \alpha \qquad \alpha \in (x,y)$$

$$\arctan x - \arctan y = (x-y)\frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$|\arctan x - \arctan y| = \left|\frac{x-y}{1+\alpha^2}\right| = \frac{|x-y|}{1+\alpha^2} = \frac{x-y}{\underbrace{1+\alpha^2}_{\geq 1}} \leq x-y = |x-y|$$

b) $\sin x < x$

$\sin x - \sin 0 < x - 0.$

LAGRA: $\sin x - \sin 0 = (x-0)\sin'\alpha \qquad \alpha \in (0,x)$

$\sin x = x\cos\alpha \qquad \alpha \in (0,x)$

$\cos\alpha \leq 1.$

ker sin je max 1, je treba gledati le še $x \leq 1$.

$x \leq 1 \Rightarrow \alpha \in (0,1) \Rightarrow \cos\alpha < 1$

$x\cos\alpha < x$ ✓

[illegible]

$\Leftrightarrow \sin x = x\cos\alpha < x$

$\sin x < x$ $\square$

c.) $\frac{x}{1-x} < \ln(1+x) < x \quad \forall x > 0.$

Lagrange na $f(x)=\ln(1+x)$ na intervalu $(0,x)$

$$\ln(1+x) - \ln(1+0) = (x-0)\cdot f'(\alpha) \quad \exists \alpha \in (0,x)$$

$$\ln(1+x) - \ln(1) = x \cdot \frac{1}{\alpha+1}$$

$\alpha+1 \in (1, x+1)$

$\frac{1}{\alpha+1} \in \left(\frac{1}{x+1}, 1\right)$

$\in \left(\frac{x}{x+1}, 1\right)$

$$\frac{x}{1-x} < \ln(1+x) < x \quad \square$$

LOKALNI EKSTREMI

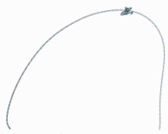
odvod spremeni predznak

lokalni minimum

f': $-$ $+$

odvod spremeni predznak

lokalni maksimum



f': $+$ $-$

v lokalnih ekstremih je odvod 0.

f': $+$ $+$

odvod $=0 \not\Rightarrow$ ekstrem

↳ ne nujno.

odvod ne spremeni predznaka

N—

Let $o > 0$. Določi dolžine stranic v tistem enakokrakem trikotniku z obsegom o, ki ima največjo ploščino.

$pl = r \cdot o_{sn}$

obseg $= 2a+c$

heron: $pl = \sqrt{\frac{o}{2}\cdot\left(\frac{o}{2}-a\right)^2\cdot\left(\frac{o}{2}-c\right)}$

$2a > c$

$a, c > 0$

$o = 2a+c$

$\frac{o}{2} - a = \cancel{a} + \frac{c}{2} - \cancel{a} > 0$

$\frac{o}{2} - c = a - \frac{c}{2} > 0.$

$pl = \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \left(\frac{c}{2}-a\right) \cdot \sqrt{\frac{a}{2}-c} = \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{2}-c}$ $\quad c \in (0, 2a)$

$$pl(c) = \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{2}-c}$$

kvadrat ploščine ima ekstreme na istih točkah kot ploščina:

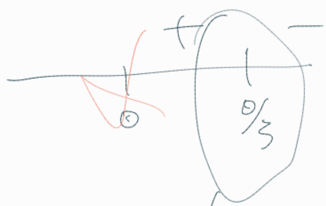
$$pl^2(c) = \frac{a}{2} \cdot \frac{c^2}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}-c\right)$$

$f(x) = x^2 \cdot \left(\frac{a}{2}-x\right) =$ (odstranimo konstante)

$$= x^2\frac{a}{2} - x^3 = ax - 3x^2 = x(a-3x)$$

$x_1 = 0$

$x_2 = a/3$



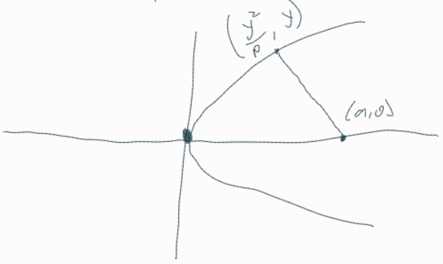
(lokalni) maksimum

pri $x = a/3$ ima f maksimum.

torej je največji tak ravno enakostraničen 3k nik.

N

Naj $p, a > 0$. Dani sta parabola $y^2 = px$ in premica $x = a$. Na paraboli poišči točko, ki je najbližje točki $(a, 0)$.



$$x = \frac{y^2}{p}$$

razdalja med $(a,0)$ in $\left(\frac{y^2}{p}, y\right)$:

$$\sqrt{\left(\frac{y^2}{p}-a\right)^2 + (y-0)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{y^2}{p}-a\right)^2 + y^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{y^4}{p^2} - 2a\frac{y^2}{p} + a^2 + y^2}$$

$$f(x) = \frac{x^4}{p^2} - \frac{2ax^2}{p} + \cancel{a^2} + x^2 =$$

$$= x^2\left(1 - \frac{2a}{p}\right) + \frac{x^4}{p^2}$$

$$f'(x) = 2x\left(1 - \frac{2a}{p}\right) + 4\frac{x^3}{p^2} = 2x\left(1 - \frac{2a}{p} + 2\frac{x^2}{p^2}\right) =$$

$$= \frac{4x}{p^2}\left(x^2 + \left(1 - \frac{2a}{p}\right)\frac{p^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{4x}{p^2}\left(x^2 + \frac{p^2}{2} - \frac{\cancel{2}ap^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{p}}\right) =$$

$$= \frac{4x}{p^2}\left(x^2 + p^2/2 - ap\right) = \frac{4x}{p^2}\left(x^2 + p\left(\frac{p}{2} - a\right)\right)$$

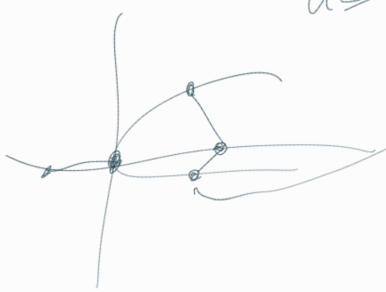
ničle

$x_1 = 0$

$a \leq 0$

$x_2 = -p\left(\frac{p}{2} - a\right) = p\left(a - \frac{p}{2}\right)$

$y_{2,3} = \pm\sqrt{p\left(a - \frac{p}{2}\right)}$



prej smo tam stenslali