$D = \{ [t_{j-1}, t_j] ; j = 1, \dots, n, t_0 = a, t_n = b \}$

↳ delitev za $J = [a, b]$

$f : J \to \mathbb{R}$

$\xi = \{ \xi_j \in [t_{j-1}, t_j] ; j = 1 \dots n \}$

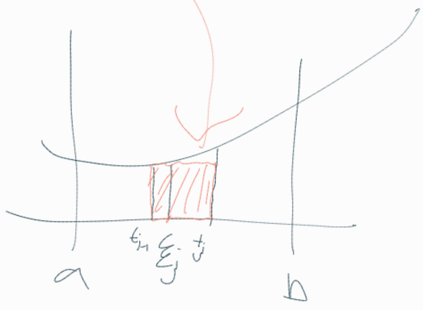
$R(f, D, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1})$

ocenimo $f(\xi_j)$:

$\inf f(x) \leq f(\xi_j) \leq \sup f(x)$

$x \in D_j$

$\sim x \in [t_{j-1}, t_j]$



Def:

$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\text{limita Riemanovih usot}}_{\text{s katerokoli delitvijo in } \xi_j\text{;}}$

zato lahko pišemo:

$\inf f(x) = f(\xi_j) = \sup f(x) \quad x \in D_j$

zato lahko limito riemanovih usot obravnavamo neodvisno od ξ.

$\inf f(x) \quad x \in D_j$ označimo z $\left(\inf_{D_j} f\right)$

$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\inf_{D_j} f\right) \cdot (t_j - t_{j-1})}_{\text{spodnja Darbouxova usota za } f, \text{ prirejena delitvi } D:\ s(f,D)} \leq R(f, D, \xi) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\sup_{D_j} f\right)(t_j - t_{j-1})}_{\text{zgornja -//- } S(f,D)}$

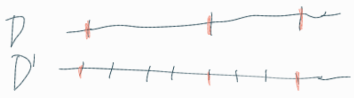
za ξ izberemo take točke, da je $f(\xi) = \left(\inf_{D_i} f\right)$

$s(f, D) \leq R(f, D, \xi) \leq S(f, D)$

let D in D' delitvi za interval J.
pravimo, da je D' finejša od D, če je $\forall D_i' \in D' : D_j' \in D$

zdb D' ima vse delilne točke D in zraven še kakšne.

(označimo $D \subset D'$)



let $D \subset D'$ (D' je finejša od D).

poglejmo $s(f, D)$ in $s(f, D')$

tedaj velja $s(f, D) \leq s(f, D')$

$s(f, D)$: gledamo inf

$s(f, D')$: gledamo inf, ampak je lahko teh inf več, od teh bo dodan inf gotovo večji od najmanjšega izmed inf izmed $s(f, D)$

Izrek: Za poljubni delitvi D_1 D_2 za J:

$$s(f,D_1) \le S(f,D_2)$$ zdb katerakoli spodnja Darbouxova vsota je $\le$ od katerekoli zgornje

Označimo z $D_1 \cup D_2$ delitev, ki vsebuje vse delilne točke D_1 in D_2. očitno velja, da sta $D_1 \subset D_1 \cup D_2$
$D_2 \subset D_1 \cup D_2$

po prejšnjem izreku:

$$s(f,D_1) \le s(f,D_1 \cup D_2) \le S(f,D_1 \cup D_2) \le S(f,D_2)$$

Def: let $f: J \to \mathbb{R}$ omejena

$s(f) := \sup s(f,D)$ po vseh možnih delitvah $\qquad S(f) := \inf S(f,D)$ po vseh delitvah

funkcija $f: J \to \mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna, če

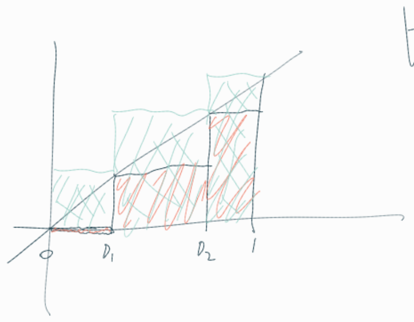
$$s(f) = S(f)$$

opomba: integrabilnost f ne pomeni, da je

$$\exists D: s(f,D) = S(f,D)$$

primer: $f(x) = x$ je integrabilna,

vendar:



$\forall D$ velja $S(f,D) > s(f,D)$

strogo

velja: f je integrabilna na J, če

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ delitev } D \text{ na } J: S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$$

izrek: $\forall$ zvezna funkcija je integrabilna na J.

Dokaz. let $\varepsilon > 0$.

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sup_{D_j} f - \inf_{D_j} f\right)(t_j - t_{j-1})$$

ker je f zvezna, je na zaprtem $J = [a,b]$ enakomerno zvezna $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.:

$$x_1, x_2 \in J: |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

dolžina J.

izberimo tako delitev D, da je

$t_j - t_{j-1} < \delta \ \forall j$.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(\sup_{D_j} f - \inf_{D_j} f\right)(t_j - t_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{x_2 - x_1}(t_j - t_{j-1}) = \dots = \varepsilon$$

odmor

Def: $A \subset \mathbb{R}$ ima mero 0, če za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ družine intervalov I_j $\ni$:

- $A \subset \bigcup I_j$
- $\sum |I_j| < \varepsilon$

Primer: vse števne in končne množice.

Izrek: f je integrabilna na J

$\Leftrightarrow \{x \in J;\ f \text{ ni zvezna na } J\}$
ima mero 0.

($\hookrightarrow$ tudi odsekoma zvezne f-je so integrabilne)

Označimo s $\mathcal{J}(J)$ množico vseh integrabilnih funkcij na J.
tedaj je vektorski prostor:

$f, g \in \mathcal{J}(J),\ \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad J = [a,b]$

$\Rightarrow f(x) + g(x) \in \mathcal{J}(J)$ in

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Izrek: Če je f integrabilna na $J = [a,b]$ in je $c \in J$, tedaj je f integrabilna na $[a,c]$ in $[c,b]$ in velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Izrek: Če sta f, g integrabilni na J in je $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in J$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Dokaz: definiramo $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$
$\hookrightarrow$ pozitivna funkcija.

$\rightarrow$ posledično velja ob isti predpostavki $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in J$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Def: če je f integrabilna na $J = [a,b]$, definiramo povprečje f na J s predpisom

$$\langle f \rangle_J := \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \qquad \langle f \rangle_J \in \mathbb{R}$$

velja:

$$\boxed{\inf_J f \leq \langle f \rangle_J \leq \sup_J f}$$

Izrek: če je f zvezna,

$\exists \xi \in J \ni: f(\xi) = \langle f \rangle_J$ (izrek o vmesni vrednosti)

Def: let f dana funkcija.
NEDOLOČENI integral f je takšna fja F,
če obstaja $\exists$: $F' = f$. to pomeni
$\forall x: F'(x) = f(x)$

pišemo tudi: Pf ali Pf in pravimo, da je
$F = Pf$ primitivna funkcija za f.
velja: $P(f+g) = Pf + Pg$ (aditivnost odvoda)
$P(\lambda f) = \lambda Pf$
Nedoločeni integral je na intervalu določen do aditivne konstante natančno. (hence the name).
če je $F_1' = f = F_2'$ na intervalu J oziroma
na J: $(F_1 - F_2)' = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 =$ konstantna fja.
$F_1 = F_2 +$ konstanta

Oznaka $F(x) = \int f(x)\,dx$ brez mej.

velja: $\int f(x) g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\,dx$
(integracija po delih ~ per partes)

izhaja iz odvoda produkta:
$(fg)' = f'g + fg'$

---

let f integrabilna na J,
definiramo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
velja: $|F(x_1) - F(x_2)| = |\int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_2} f(t)\,dt| =$

$= |\int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_2}^a f(t)\,dt| =$

$= |\int_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt| = |\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt$

$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \leq (\sup_J |f|)(x_2 - x_1)$

$\Rightarrow F$ je zvezna.

fundamental theorem of calculus
osnovni izrek analize

let $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in F kot prej.
tedaj je F odvedljiva na J in velja $F'(x) = f(x)$
Dokaz: $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad /:h$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \langle f \rangle_{[x, x+h]}$$

$$\lim_{h\to 0} \langle f \rangle_{[x, x+h]} = f(x)$$

Dokaz:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) =$$

$$= L \; \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \underbrace{[f(t)-f(x)]}_{\text{absolutno } < \varepsilon \text{ za majhn.}} dx$$

Posledica:

let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna in $G = Pf$ $(G' = f)$.

tedaj je $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Dokaz: let F bot pnf: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

ker je $F' = f = G'$ je

$(F-G)' = 0 \Rightarrow F - G = konst$

$\Rightarrow G(x) = F(x) + konst$

$\Rightarrow G(a) = \underbrace{F(a)}_{0 \text{ po def.}} + konst$

$\Rightarrow G(a) = konst$

$\Rightarrow F(x) = G(x) - G(a)$

$\Rightarrow F(b) = G(b) - G(a)$

$= F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

Iskanje Pf:

- ugonimo je
- $P(x^n) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

- $P(e^x) = e^x$
- $P(\sin x) = -\cos x$
- $P(\cos x) = \sin x$
- $P(\ln x) = x(\ln(x) - 1)$

VEMO: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$ $\quad /\int$

$\int (g\circ f)'(x)dx = \int g'(\underbrace{f(x)}_{t})\cdot f'(x)$

$\int g'(t)\cdot dt$

Pišimo $g' = G$:

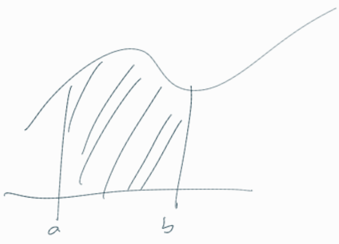
$$\Rightarrow \int G(t)\,dt = \int G(f(x))\cdot f'(x)\,dx$$

odmor

Izlimitirani integrali

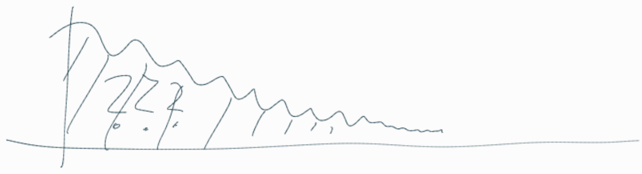
Omejena f-ja in omejen interval.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



Kaj pa neomejen interval?

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$



Naj $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ in f integrabilna na $[a,m]$ $\forall m > a$.

Če $\exists \lim_{m\to\infty}\int_a^m f(x)\,dx$, pravimo, da integral od a $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergira, sicer pa divergira.

↳ tedaj ga označimo:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{m\to\infty}\int_a^m f(x)\,dx$$

Podobno definiramo

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx.$$

Pomemben primer:

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx = ?$$

$$\int_1^M x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_1^M - \frac{1}{\alpha+1} \quad ; \text{če } \alpha+1\neq 0,\ \alpha\neq -1.$$

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M x^\alpha\,dx\ \exists \iff \alpha < -1$$

PRIMER

$$\int_1^\infty x^{-1}\,dx = (\ln M) - (\ln 1)$$

$\ln 1 = 0$

$\ln M \to \infty$ divergira.

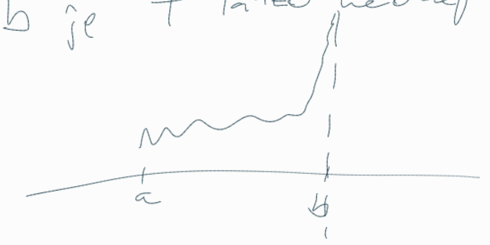
Def: $\int_a^\infty f(x)\,dx$ je absolutno konvergenten, če je $\int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty$. V tem primeru tudi $\int_a^\infty f(x)\,dx$ obstaja.

$$\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|dx$$

a je predpostavka, da je f-ja zvezna, potrebna?

let $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ $\exists$: f integrabilna na vsakem $[a,c]$; $c < b$.

v točki b je f lahko neomejena:



če $\exists$ končna limita
$$\lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx,$$
je interval $[a,b)$ konvergenten, sicer je divergenten.

podobno definiramo, če je f definirana na ??? intervalu $[c,b]$ $\forall c>a$

PRIMER 1

$\int_0^1 x^\alpha dx$, za $\alpha<0$ izgleda graf x^α:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^\alpha dx$$

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_1^\varepsilon = \frac{1-\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} =$$

$$= \boxed{\frac{1-e^{(\alpha+1)\log\varepsilon}}{\alpha+1}} \qquad \log\varepsilon \to -\infty \qquad \alpha+1 \neq 0$$

$\to \pm\infty$, odvisno od α.

sklep: $\int_0^1 x^\alpha dx$ $\exists \Leftrightarrow (\alpha+1)>0$;

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$$

---

uporaba integrala:

— ploščine: $f \ge 0$ na $J=[a,b]$ in je $f \in \mathcal{R}(J)$, je ploščina lika med x osjo in grafom f (Γ_f pomeni „graf f") definirana kot
$$\int_a^b f(x)dx$$

— če f ni pozitivna,
$$\int_a^b f(x)dx = pl(L_1) - pl(L_2)$$

Primer:

ploščina kroga : $x^2+y^2=r^2$ za $r>0$.

$y=\sqrt{r^2-x^2}$

$\Rightarrow$ pl. kroga z radijem r je

$$2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

...