ANAIPFMF2023-01-09

Oglejmo si potenčne vrste kot poseben primer funkcijskih vrst.

$\hookrightarrow \sum a_k(x)$ $\qquad \hookrightarrow \sum b_k x^k$

Vemo: Potenčna vrsta ima konvergenčni radij R. Za $x \in (-R, R)$ konvergira, za $x \in [-R, R]^C$ divergira.

IZREK: Naj ima potenčna vrsta $\overset{(*)}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ konvergenčni radij R. Tedaj ima tudi $\overset{(*)}{g(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k x^{k-1}$ konvergenčni radij R.

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$$

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[k]{|k a_k|} = \limsup \left(\sqrt[k]{k}\, \sqrt[k]{|a_k|}\right) = \limsup \left(1 \cdot \sqrt[k]{|a_k|}\right) = \limsup \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)$$

$$\sqrt[k]{k} = k^{1/k} = e^{\ln k^{1/k}} = e^{\frac{1}{k}\ln k} = e^{\frac{\ln k}{k}} \to 1, \qquad \frac{\ln k}{k} \to 0$$

Posledica: Če ima pot. vrsta konvergenčni radij $R > 0$, tedaj je $f \in C^\infty((-R, R))$ in velja

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Velja: $\overset{(*)}{g} = \overset{(*)}{f'}$.

Def: f-ja $f: J \to \mathbb{R}$ (J interval) je realno analitična, če se da okoli vsake točke $c \in J$ razviti v potenčno vrsto.

$$\hookrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k, \text{ za } x \text{ blizu } c.$$

za x blizu c.

TRDITEV: $f \in C^\infty \overset{\text{ne nujno}}{\not\Rightarrow} f$ se da razviti v vrsto povsod.

izkaže se, da

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ... $f'(x) = 0$ ...

protiprimer: $f(x) = e^{|x|}$. [D.N.]

PRIMERI TAYLORJEVIH VRST:

I. $f(x) = e^x$

n-ti Taylorjev polinom za $f(x)$ okoli 0:

$$T_{n,e^x,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

velja $e^x = T_n(x) + \boxed{R_n(x)}$ → 0, ko $n \to \infty$ (ne bomo dokazali).

sledi: $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

LIHA LIHO

velja še: $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

odvodi: cos, −sin, −cos, sin, cos, −sin, ...

v $f(0)$ so to: 1, 0, −1, 0, 1, 0, −1, . . .

izpadejo ti členi:

SODA SODO

tudi: $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

PRIMER: $f(x) = \log(1-x)$

graf:

Taylorjeva vrsta okoli točke 0?:

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
0	$\log(1-x)$	0
1	$\frac{-1}{1-x}$	-1
2	$\frac{-1}{(1-x)^2}$	-1
3	$\frac{-2}{(1-x)^3}$	-2
...	...	...
n	$\frac{-(n-1)!}{(1-x)^n}$	$-(n-1)!$

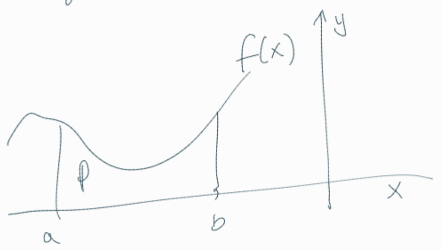
velja ⟹ $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(k-1)!}{k!} x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

za $|x| < 1$.

INTEGRALI

Radi bi definirali ploščino $P = \{(x,t)\in\mathbb{R}^2;\ x\in[a,b];\ t\in[0,f(x)]\}$

za f-jo $f:[a,b]\to[0,\infty)$.



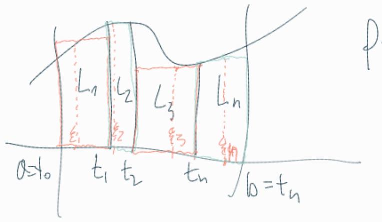
P aproksimiramo s pravokotniki, katerih ploščino smo predhodno definirali takole:

{ploščina pravokotnika s stranicama c, d je c·d

Takole: Naj bo t_j delitev $[a,b]$, torej:

$$a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$$

Ne zahtevamo „ekvidistančne delitve", torej take, pri kateri bi bile razdalje enake.



$P = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \dots \cup L_n$

kako definiramo pravokotnike iz teh likov?

na več načinov. Lahko recimo tako, da na vsakem intervalu $[t_i, t_{i+1}]$ izberemo neč ξ_i, pravokotnikova osnovnica bodi $t_{i+1}-t_i$, višina pa $f(\xi_i)$ (glej sliko.)

ploščina P je približno enaka Σ ploščin teh pravokotnikov.

torej: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(t_k-t_{k-1})}_{} = R(f, \underset{\text{delitev}}{D}, \vec{\xi})$

↳ „Riemannova vsota" za f, ki pripada delitvi t_j in izboru $\xi_j$ev.

Če je $D:=\{[t_{j-1},t_j];\ j=1,\dots,n\}$ delitev za $[a,b]$, definiramo

vpeljimo tako oznako: $|D|_\infty := \max_{j=1,\dots,n}(t_j-t_{j-1}) = \max_{I\in D}(|I|)$

$|D|_\infty = 10^{-1} \to$ majhen

Če $\exists A\in\mathbb{R}\ \ni$: za poljubno fine delitve D se

... od A

pripadajoče Riemannove vsote malo [illegible],
pravimo številu A ploščina lika P.

Def: Let f, D, ξ kot prej in $I \in \mathbb{R}$ realno število.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$;
- $\forall$ delitev D z: $\|D\|_\infty < \delta$
- $\forall$ nabor $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n$, pripadajoč delitvi D

velja $|R(f, D, \xi) - I| < \varepsilon$

$\Longrightarrow$ I je določen integral f na intervalu $[a,b]$.

I je po definiciji ploščina lika P.

Če tak I obstaja (kar ni a priori), pravimo, da je f integrabilna na $[a,b]$ in pišemo $I = \int_a^b f(x)\,dx$

To je „Riemannov integral" funkcije f na $[a,b]$.