ANAIPFMF 2024-01-08

L'Hopitalovo pravilo, ki bo ostalo nedokazano:

kako izračunati $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$?

če so zvezne f-je v a in $g(a) \neq 0$, $= \frac{f(a)}{g(a)}$

če imata f-ji v a limito in $\lim_{x\to a} g(a) \neq 0$

$= \frac{\lim_{x\to a} f(a)}{\lim_{x\to a} g(a)}$

če $g(x) \to \infty$ in $f(x)$ omejena okoli a:

$= 0$

če $f(x) \to 0$ in $g(x)$ omejen navzdol proč od 0:

$= 0$

zanimivi primeri: $f(x), g(x) \longrightarrow 0$

$f(x), g(x) \longrightarrow \infty$

konkretno $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x}$; $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$; $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2}$

L'Hopitalovo pravilo:

let: 1.) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$ zdb: bodisi f, g oba $\to 0$
bodisi f, g oba $\to \pm\infty$

2.) f, g v okolici a odvedljivi

3.) $\exists L := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Longrightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in je enaka L.

PRIMERI:

I. $\lim_{x\to 0} x^x$

$A = \lim_{x\to 0} x^x \quad / \log$

$\log A = \lim_{x\to 0} \log x^x$ (zaradi zveznosti log)

$\log A = \lim_{x\to 0} x \log x$

ali pa $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x \ln x} = e^{\boxed{\lim_{x\to 0} x \ln x}}$

vstavimo $x=0$

$0 \cdot (-\infty)$ CRK

$\lim_{x\to 0} x \ln x =$ uporabimo L'Hopitala. potrebujemo frac.

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \log x}{x} =$ ideja: $/\cdot x$ CRK, limiti nista enaki

ideja#2: $/\cdot \frac{1}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\log x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1 \checkmark$$

ideja#3: $/ \cdot (\log x)^{-1}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{(\log x)^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{-1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \boxed{\lim_{x\to 0} -x\log^2 x}$$

tisla, zakomplicirali smo.

II. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = 1/2$$

TAYLORJEV IZREK IN TAYLORJEVA FORMULA

Let f dovoljkrat odvedljiva f-ja v okolici točke a.

Želimo aproksimirati $f(a+h)$ s polinomi s h danega reda.

Iščemo polinome reda n.

$n=0$: konstante. $f(a+h) = f(a)$

$n=1$: $f(a+h) \sim f(a) + f'(a)h$

$n=2$: ...

želimo najti $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, odvisne le od f in a,

za katere $f(a+h) \sim a_0 + a_1 h + a_2 h^2$

v smislu da

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - (a_0 + a_1 h + a_2 h^2)}{h^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(a+h) - (a_0 + a_1 h + a_2 h^2) = 0$$

$$\|$$

$$f(a) - (a_0 + a_1 0 + a_2 \cdot 0) = 0$$

$$f(a) - a_0 = 0$$

imamo: $f(a) = a_0$

L'Hopitalovo pravilo pove, da zadošča, da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - (0 + a_1 + 2a_2 h)}{2h} = 0$$

gledamo števec in vstavimo $h=0$

$$f'(a) - a_1 = 0$$

$$f'(a) = a_1$$

spet uporabimo L'H:

$$\lim \frac{f''(a+h) - (0 + 0 + 2a_2)}{} = 0$$

$$f''(a) - 2a_2 = 0$$

$$\frac{f''(a)}{2} = a_2$$

Ugibamo: najboljši kubični približek je

$$f(a+h) \sim h \mapsto f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^2$$

Kaj pa približek reda n?

$$f(a+h) \sim f'(h) = \boxed{\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j}$$

ODMOR

Izrek (Taylor): Let $n \in \mathbb{N}$, I interval $\in \mathbb{R}$, $a \in I$

$f: I \to \mathbb{R}$ n-krat odvedljiva v točki a.

Tedaj $\exists$ f-ja $g_n: I - a \to \mathbb{R}$ $\ni$: $\{t-a;\ t \in I\}$: v okolici točke 0

- $f(a+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{n!} h^j + \underbrace{\boxed{g_n(h) \cdot h^n}}_{\text{napaka}}$
- $\lim_{h \to 0} g_n(h) = 0$

Sedaj pa pišimo $x = a+h$: tedaj se izrek glasi:

- $f(x) = \boxed{\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{n!} (x-a)^j} + \overbrace{\boxed{\tilde{g}_n(x)(x-a)^n}}^{\text{ostanek / napaka}}$ OZNAKA $R_{n,f,a}(x)$
- $\lim_{x \to a} \tilde{g}_n(x) = 0$

n-ti taylorjev polinom za f okrog točke a.

OZNAKA: $T_{n,f,a}(x)$.

Izrek: Če je f $(n+1)$-krat odvedljiva na odprtem intervalu $I \subset \mathbb{R}$; $a \in I$, tedaj

$\forall x \in I\ \exists \alpha \in I$ med a, x $\ni$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(sledi iz Lagrangea [D.N.]

Posledično:

če je $(n+1)$. odvod omejen na I, t.j.

$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \forall x \in I$ in neki $M > 0$,

lahko ostanek eksplicitno ocenimo, in sicer:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

Vprašanje $n \longrightarrow \infty$?

iskanje aproksimacij s „$\underbrace{\text{polinomi" reda } \infty}_{\text{potenčne vrste.}}$!

neskončnokrat odvedljive f-je

Def. Če je $f \in \boxed{C^\infty}$ v okolici točke $a \in \mathbb{R}$:

$$T(x) = T_{f,a}(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$$

pravimo Taylorjeva vrsta.

- Ali konvergira oz. kje?
- Zveza z $f(x)$? Kakšen je R?!!1