ANAIPFMF 2023-12-04

[Enakomerna zveznost]

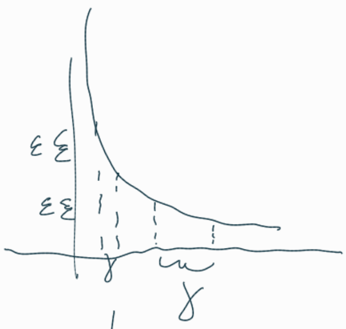
$f: I \to \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna na $I$, če

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni: x, y \in I \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$f: I \to \mathbb{R}$ je zvezna na $I$

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in I\ \exists \delta(x) > 0 \ni: x, y \in I \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

RAZLAGA: Enakomerno zvezna funkcija delte nima odvisne od $x$. $\exists$ delta, četudi majhna, ki je dobra za vse. Primer neenakomerno zvezne f-je $1/x$:



ta $\delta$ je odvisen od $x$ in ni dober za $x$e bolj levo.

IZREK: Zvezna f-ja na kompaktni množici je enakomerno zvezna, en zaprt interval $1/x$ bo enakomerno zvezen. $1/x$ sama po sebi – $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ pa ni def na kompaktni množici

DOKAZ: Recimo, da $f$ ni enakomerno zvezna.

zanikajmo def. enakomerne zveznosti.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni x, y \in I\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(*)

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 \ni: \exists x_\delta, y_\delta \in I \ni: |x_\delta - y_\delta| < \delta \Rightarrow \boxed{|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon}$$

IZBERIMO $x_n, y_n$, ki po tem smislu pripadata, $\delta = \frac{1}{n}$.

ker je $f: I \to \mathbb{R}$ in je $I$ kompaktna, ima zaporedje $x_n$ stekališče v $I$. Vsako stekališče je limita podzaporedja. $\exists x \in I$ in $x = \lim x_{k_n}$. na istih indeksih

podzaporedje $x_{k_n}$

$y_n$ ima stekališče, zato $\exists$ tudi $y_{k_n}$ podzaporedje, da $\exists y$, tako $y = \lim y_{k_n}$.

le za večjo preglednost

pišimo $x_\ell$ namesto $x_{k_n}$ (gledamo sedaj podzaporedji)

pišimo $y_\ell$ namesto $y_{k_n}$

$$|x-y| \le \underbrace{|x-x_\ell|}_{\to 0} + \underbrace{|x_\ell - y_\ell|}_{< \frac{1}{n_{k_\ell}} \le \boxed{\frac{1}{\ell}} \to 0} + \underbrace{|y_\ell - y|}_{\to 0} \xrightarrow{\boxed{\ell\to\infty}} 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = y$$

$$\Downarrow$$

$$x_\ell, y_\ell \to x \in I$$

ker je $f$ zvezna,

$\exists \delta > 0 : |z-x|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(x)| < \varepsilon/2$

naj bo $\ell$ tak, da je $|x_\ell - x| < \delta$

in $|y_\ell - y| < \delta$

$$\Downarrow$$

$$|f(x_\ell)-f(x)| < \varepsilon/2 \wedge |f(y_\ell)-f(x)| < \varepsilon/2$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x_\ell)-f(y_\ell)| \le |f(x_\ell)-f(x)| + |f(y_\ell)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$f(x_\ell)-f(x)-\left(f(y_\ell)-f(x)\right)$$

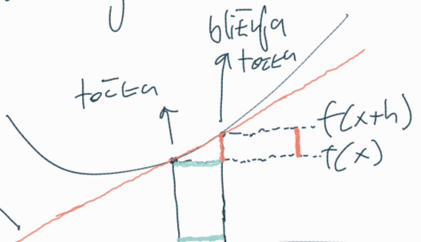
$\cancel{|f(x_\ell)-f(y_\ell)| < \varepsilon}$

(*) pravi $|f(x_\ell)-f(y_\ell)| \ge \varepsilon$

Zato je bila začetna (negirana) predpostavka napačna, torej $f$ je enakomerno zvezna.

[ODVOD]

$v$ je hitrost/stopnja, s katero se v danem trenutku neka količina spreminja.




radi bi naklon tangente

zanima nas

$$\frac{\boxed{f(x+h)-f(x)}}{\boxed{h}} = \text{naklon sekante}.$$

$$\Downarrow$$

setanje, odvisen le od $x$, ne od $h$. bližnjo točko pošljemo proti začetni — $h$ pošljemo proti $0$.

$x \quad x+h$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

če limita obstaja.

ODVOD funkcije $f$ v točki $x$

DEFINICIJA

Pravimo, da je $f$ odvedljiva na množici $I \in \mathbb{R}$, če je odvedljiva na vsaki $t \in I$.

$f$ je odvedljiva na točki $t$, kadar limita iz definicije obstaja.

Primeri: $f(x) = c \quad c \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$

$f(x) = x \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$

$f(x) = x^2 \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$

TRDITEV: Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ so funkcije $f(x) = x^n$ so funkcije odvedljive na $\mathbb{R}$, in velja $f'(x) = nx^{n-1}$

DOKAZ:

- $f(x+h) - f(x) = (x+h)^n + x^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} x^{n-k} h^k\right) - x^n =$

$= \underbrace{\cancel{1x^n}}_{k=0} + \underbrace{\underbrace{n x^{n-1} h}_{k=1} + \sum_{k=2}^{n} \left(\binom{n}{k} x^{n-k} \boxed{h^k}\right)}_{h \text{ izpostavimo}} \cancel{- x^n}$.

- $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = n x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \left(\underbrace{\boxed{\binom{n}{k} x^{n-k}}}_{\text{od } h \text{ neodvisno.}} h^{\boxed{k-1}}\right)$.

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = n x^{n-1} + \boxed{\sum_{k=2}^{n} \left(\binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}\right)} = \underline{n x^{n-1}}$

TRDITEV: $\sin' = \cos$

$\cos' = -\sin$

DOKAZ: $f(x) = \sin x$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$$

$$= \frac{\sin x \cosh + \sinh \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} =$$

[domača naloga: $\cos' = -\sin$]

$$\left[\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1}\right]$$

$$\frac{\sin h}{h}\left(\cos x - \frac{\sin h}{\cos h + 1} \sin x\right) =$$

$$\frac{\sin h}{\cos h+1} \to 0$$

$$= \cos x.$$

Vemo: $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ } ne bomo dokazali. Privzemimo kot dejstvo.

Naj bo $a > 0$ in $f(x) = a^x$. Tedaj je $f'(x) = a^x \ln a$

Dokaz: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} =$

$$= a^x \left(\frac{\overbrace{(a^h - 1)}^{\text{neodvisno od } x}}{h}\right) =$$

Pišimo: $\boxed{a^h - 1 =: \frac{1}{x'}}$

če $h \searrow 0$, tedaj $a^h - 1 \searrow 0$

$\Longrightarrow x' \nearrow +\infty$

različna

$$= a^x \frac{1/x'}{\frac{\log(1 + 1/x')}{\log a}} = a^x \frac{1/x' \cdot \log a}{\log(1 + 1/x')} =$$

$$= a^x \frac{\log a}{\log\left(\left(1 + \frac{1}{x'}\right)^{x'}\right)} \to a^x \frac{\log a}{\log e} = a^x \log a.$$

Podobno naredimo, če $h \nearrow 0$ ali če $a \in (0, 1]$.

TRDITEV: Če je $f$ odvedljiva v točki $x$, je tam tudi zvezna.

DOKAZ: zveznost $f$ v $x \Leftrightarrow f(x) = \lim_{t \to x} f(t)$ oz.

$$\lim_{h \to 0} \left[f(x+h) - f(x)\right] \stackrel{?}{=} 0$$

$$f(x+h)-f(x) = \boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \cdot h$$

$\hookrightarrow f'(x)$ $\qquad h \to 0$

obe limiti morata obstajati
$\hookrightarrow$ f je odvedljiva

„Diferenčni kvocient"

„ker je limita produkta enaka produktu limit (+ itd pogoji)..." ; je

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x) = f'(x)\cdot 0 .$$