ANAIPFMF2023-11-27

Izrek: naj bo $K \subset \mathbb{R}$ kompaktna in $f: K \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je f omejena in doseže minimum in maksimum.

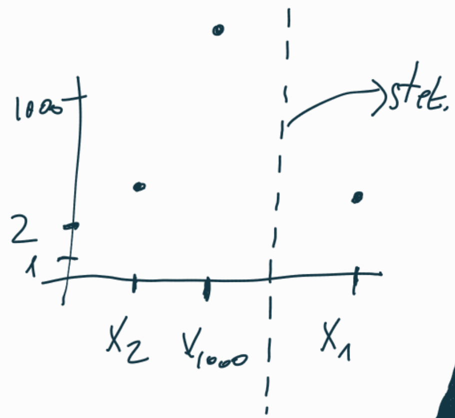
Dokaz: Poseben primer: K je zaprt omejen interval.

$K = [a,b]$

Kaj trdimo? $\exists m, M \in \mathbb{R} \ni: \forall x \in K: m \leq f(x) \leq M$

Dokazujmo s protislovjem.

Recimo, da (*)



za $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \exists x_n \in K \ni: f(x_n) > n}$

zaporedje $(x_n)_n$ leži v K, zato je omejeno.

$\Downarrow$

ima vsaj eno stekališče

$\Downarrow$

$\exists s \in \mathbb{R}$, ki je stekališče zaporedja $(x_n)_n$

pri odprtih K temu ni vedno tako.

ker je K zaprt in x_n pod K, sledi $s \in K$.

„stekališče je limita nekega podzaporedja". Vemo, da $\exists$ podzaporedje $(x_{n_k})_k \ni s = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$

Ker je f zvezna na K in so x_{k_n}, $s \in K$, sledi

$\Rightarrow f(s) = \lim\limits_{t\to\infty} f(\underbrace{x_{n_t}}_{> n \geq t})$ iz def. podzaporedja.

$\lim\limits_{t\to\infty} f(x_{n_t}) = \infty$, toda f slika v $\mathbb{R}$, zato $f(x)$ za $x \in K$ ne more biti ∞. $\times$

ta x je s.

torej predpostavka ✱ ne velja, torej f je navzgor omejena.

Podobno dokažemo, da je f navzdol omejena.

sedaj smo dokazali, da je $M := \sup\limits_{x\to\infty} f(x) < \infty$

$\in \mathbb{R}$

Sedaj bi dokazali, da funkcija doseže supremum:

$$\exists x_+ \in K \ni: f(x_+) = M.$$

po definiciji M vemo, da vsaka manjša vrednost od M ni supremum.

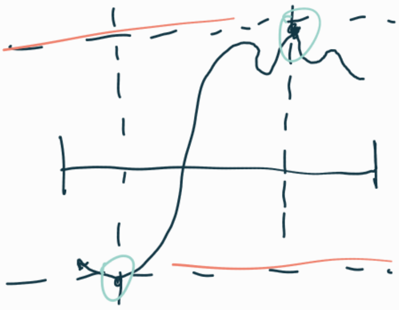
za $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in K \ni: f(x_n) > \boxed{\frac{1}{n}}$.

gre proti 0 in je čedalje manjše z n.

Kompaktnost: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x_+$ in velja

$$M \geq f(x_+) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\geq M - \frac{1}{n}} \geq M \Rightarrow f(x_+) = M$$

dokazali smo, da f doseže supremum. podobno za infimum.



zvezna funkcija na zaprtem intervalu doseže $\boxed{\inf}$ in $\boxed{\sup}$ in je $\boxed{\text{omejena}}$

krajišči sta nasprotno predznačeni

Izrek: naj bo $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ in naj velja $f(a)f(b)<0$

tedaj $\exists x \in (a,b) \ni: f(x)=0$

Ideja: $I=[a,b]$ razdelimo na pol. to pomeni, da zapišemo $I = I_1 \cup I_2$, kjer je I_1 zaprti interval $[a, b/2]$ in $I_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$

pogledamo funkcijsko vrednost v središču $(I_1 \cap I_2)$.
če je 0, smo našli $f(x)=0$.

V nasprotnem primeru:

gledamo tisti interval izmed I_1, I_2, v krajiščih katerega ima f različno predznačene vrednosti: naj bo to J_1.

s tem postopkom nadaljujemo na $J_1, J_2, J_3, \dots$

Označimo $J_n=[a_n,b_n]$ Vemo: $|J_n| = \frac{|I|}{2^n}$ → velikost intervala I (začetnega)

$b_n - a_n$

$\Rightarrow$ vemo: $f(a_n)$ [D.N.] ima isti predznak kot $f(a)$

$f(b_n)$ ima isti predznak kot $f(b)$

Velja: $(a_n)_n$ narašča, $(b_n)_n$ pada

velja: $a_n < b_n$

velja: obe zaporedji sta omejeni

$\Rightarrow \exists a_\infty := \lim_{n\to\infty} a_n \in I$

$\exists b_\infty := \lim_{n\to\infty} b_n \in I$

ker je I zaprt

iz $b_n - a_n = \frac{|I|}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ sledi $a_\infty = b_\infty = x$

$\Downarrow$

$a_\infty - b_\infty = 0$

če je $f(a) < 0$, je $f(a_n) < 0$, tedaj

ker je f zvezna, velja $f(a_\infty) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ in $f(b_\infty) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$, $f(x) = f(a_\infty) = f(b_\infty) = 0$

ali obratno $>, >, \geq, \leq$

$\square$

Posledica: naj bo I omej. zaprt interval $\in \mathbb{R}$ in $f: I \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj:

$\exists x_-, x_+ \in [a,b] \ni$:

- za $\forall x \in I$ je $f(x) \in [f(x_-), f(x_+)]$

min funkcije — max funkcije

- za $\forall y \in [f(x_-), f(x_+)]$ $\exists x \in I \ni: y = f(x)$

trditev $f(I) = [f(x_-), f(x_+)]$

Dokažimo to!

Če je $y = f(x_-)$ vzamemo $x = x_-$

če je $y = f(x_-)$, vzamemo $x = x_+$

če je $y=f(x_+)$, vzamemo $x=x_-$

če je $f(x_-) < y < f(x_+)$, poglejmo funkcijo

$$g(x) := f(x) - y.$$

ker je $g(x_-) = f(x_-) - y < 0$ in

$g(x_+) = f(x_+) - y > 0$.

SKOČ NA PREJ DOKAZAN IZREK.

g je zvezna na $[x_-, x_+]$, torej $\exists x \in$ $\ni: g(x) = 0$,

to pomeni ravno $f(x) = y$

$\Rightarrow$ t.d.d. zvezna fja na zaprtem intervalu $[a,b]$ doseže vse funkcijske vrednosti na intervalu $[f(a), f(b)]$

SEDAJ PA EN IZREK BREZ DOKAZA.

let I poljuben interval v $\mathbb{R}$ med a in b $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ in $f: I \to \mathbb{R}$ zvezna in strogo monotona. Tedaj je $f(I)$ interval med $\underbrace{f(a+0)}_{\lim\limits_{u \searrow a}(f(u))}$ in $\underbrace{f(b-0)}_{\lim\limits_{u \nearrow a}(f(u))}$. Inverzna funkcija f^{-1} je definirana na $f(I)$ in zvezna.

desna leva

NE bomo dokazali,

Razlaga: Primer: $f := \arctan$ ✓

$I = (-\infty, \infty)$ ✓

zvezna je. ✓

ker je atan bijektivna

vzamemo $y \in f(I)$. tedaj $\exists! x \in I \ni: y = f(x)$

tedaj definiramo $x := f^{-1}(y)$

ta fja obstaja in je spet zvezna.

NASLEDNJIČ: Enakomerna zveznost:
delta ni odvisna od a.