Rešitev osme domače naloge Linearne Algebre

Anton Luka Šijanec

26. maj 2024

Povzetek

Za boljšo preglednost sem svoje rešitve domače naloge prepisal na računalnik. Dokumentu sledi še rokopis. Naloge je izdelala asistentka Ajda Lemut.

1. Dokaži, da je $[(x,y,z),(u,v,w)] = 2xu - yu - xv + 2yv - zv - yw + zw$ skalarni produkt in ugotovi, ali je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

normalna preslikava glede na $[\cdot,\cdot]$.

Rešitev Predpostavljam polje $\mathbb{R}$ in vektorski prostor $V = \mathbb{R}^3$, saj v kompleksnem to ni skalarni produkt (protiprimer pozitivne definitnosti je $[(1,1,1+i),(1,1,1+i)] = 2$). $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ je skalarni produkt, če zadošča naslednjim lastnostim. Dokažimo jih za $[\cdot,\cdot]$.

(a) $\forall v \in V : v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v\rangle > 0$

$$[(x,y,z),(x,y,z)] = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2 = 2\left(x^2 - xy + y^2\right) - 2yz + z^2 =$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right) - 2yz + z^2 = 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{3y^2}{4} - 2yz + z^2 =$$

$$= 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{2}} - \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{z^2}{3} \geq 0$$

Sedaj poiščimo ničle. Fiksirajmo poljubna y, z in uporabimo obrazec za ničle kvadratne enačbe:

$$x_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 8\left(2y^2 - 2yz + z^2\right)}}{4}$$

Iščemo pozitivne diskriminante.

$$4y^2 - 8\left(2y^2 - 2yz + z^2\right) = -12y^2 + 16yz - 8z^2 = 4$$

Fiksirajmo poljuben z. Vodilni koeficient kvadratne enačbe je negativen. Uporabimo obrazec:

$$y_{1,2} = \frac{-16z \pm \sqrt{256z^2 - 384z^2 = -128z^2}}{-24}$$

Diskriminanta je nenegativna $\Leftrightarrow z = 0$. Torej $z = 0$, zato $y = 0$ in tudi $x = 0$ glede na obrazce. Skalarni produkt je res pozitivno definiten.

(b) $\forall v, u \in V : \langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$

$$[(u,v,w),(x,y,z)] = [(x,y,z),(u,v,w)]$$

$$2ux - vx - uy - 2vy - wy - vz + wz = 2xu - yu - xv + 2yv - zv - vz + wz$$

$$0 = 0$$

Skalarni produkt je res simetričen.

(c) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \forall u_1, u_2, v \in V : \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$

$$[\alpha_1 (x_1, y_1, z_1) + \alpha_2 (x_2, y_2, z_2), (u, v, w)] =$$
$$= [(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2), (u, v, w)] =$$
$$= 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) u - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) u - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) v +$$
$$+ 2(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) v - (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) v - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) w + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) w =$$
$$= 2\alpha_1 x_1 u + 2\alpha_2 x_2 u - \alpha_1 y_1 u - \alpha_2 y_2 u - \alpha_1 x_1 v - \alpha_2 x_2 v +$$
$$+ 2\alpha_1 y_1 v + 2\alpha_2 y_2 v - \alpha_1 z_1 v - \alpha_2 z_2 v - \alpha_1 y_1 w - \alpha_2 y_2 w + \alpha_1 z_1 w + \alpha_2 z_2 w =$$
$$= \alpha_1 (2x_1 u - y_1 u - x_1 v + 2y_1 v - z_1 v - y_1 w + z_1 w) + \alpha_2 (2x_2 u - y_2 u - x_2 v + 2y_2 v - z_2 v - y_2 w + z_2 w) =$$
$$= \alpha_1 [(x_1, y_1, z_1), (u, v, w)] + \alpha_2 [(x_2, y_2, z_2), (u, v, w)]$$

Skalarni produkt je res homogen in linearen v prvem faktorju.

Po definiciji A normalna $\Leftrightarrow A^* A = A A^*$. Izračunajmo torej matriko A^*.

- Na predavanjih 2024-05-08 smo dokazali, da za vsak skalarni produkt $[u, v]$ obstaja taka ortogonalna ($M^* = M^{-1}$) pozitivno definitna matrika M, da velja $[u, v] = \langle u, Mv \rangle$, kjer je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt.
- Izpeljimo predpis za A^* pri podani matriki A in skalarnem produktu $[\cdot, \cdot]$ s pripadajočo matriko M:

$$[A^* x, y] = [x, Ay] \text{, uporabimo prvo točko:}$$
$$\langle A^* x, My \rangle = \langle x, MAy \rangle \text{, pišimo } z = My\text{:}$$
$$\langle A^* x, z \rangle = \left\langle x, MAM^{-1} z \right\rangle \text{, upoštevajmo drugo točko:}$$
$$\langle A^* x, z \rangle = \left\langle M^{-1} A^{\square} M x, z \right\rangle \text{, kjer je } A^{\square} \text{ adjungacija } A \text{ pri standardnem skalarnem produktu}$$
$$\Rightarrow A^* = M^{-1} A^{\square} M = M^{-1} \overline{A}^T M \overset{A \in M(\mathbb{R})}{=} M^{-1} A^T M$$

- Potrebujemo še matriko skalarnega produkta.

$$\langle (x, y, z), M(u, v, w) \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} um_{11} + vm_{12} + wm_{13} \\ um_{21} + vm_{22} + wm_{23} \\ um_{31} + vm_{32} + wm_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} & xum_{11} & xvm_{12} & xwm_{13} & + \\ + & yum_{21} & yvm_{22} & ywm_{23} & + \\ + & zum_{31} & zvm_{32} & zwm_{33} & \end{matrix} = [(x, y, z), (u, v, w)] = 2xu - yu - xv + 2yv - zv - yw + zw, \text{ torej}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{, njen inverz pa je } M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Izračunamo A^* po formuli $A^* = M^{-1} A^T M$ in preverimo $A^* A = A A^*$:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^* A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -10 & 14 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A A^*$$

A ni normala matrika.

- Da preverimo pravilnost matrike A^*, lahko napravimo preizkus:

```
sage: A = Matrix([[0, 2, -2], [0, 1, 0], [-1, 2, -1]])
sage: AA = Matrix([[-1, 2, -1], [-2, 3, -1], [-6, 6, -2]])
sage: def sp(a,b): return 2*a[0]*b[0]-a[1]*b[0]-a[0]*b[1]+2*a[1]*b[1]-a[2]*b[1]-a[1]*b[2]+a[2]*b[2]
sage: xyz = vector([var("x"), var("y"), var("z")])
sage: uvw = vector([var("u"), var("v"), var("w")])
sage: (sp(A*xyz, uvw) == sp(xyz, AA*uvw)).expand()
v*x - w*x + 3*u*y - 2*v*y + w*y - 4*u*z + 3*v*z - w*z == v*x - w*x + 3*u*y - 2*v*y + w*y - 4*u*z + 3*v*z - w*z
sage: bool((sp(A*xyz, uvw) == sp(xyz, AA*uvw)).expand())
True
sage:
```

Slika 1: Preizkus s programom SageMath.

Dokazati, da A ni normalna, je moč še lažje. Dokažemo lahko namreč, da eden izmed potrebnih pogojev za normalnost matrike ni izpolnjen. Na primer: $AA^* = A^*A \to A = PDP^{-1}$, kjer je P ortogonalna in D diagonalna $\Rightarrow$ lastni vektorji A tvorijo ortogonalno množico.

Lastne vrednosti A so (s kalkulatorjem) $\{-2, 1\}$, kjer ima 1 algebrajsko večkratnost 2. Lastni vektorji:

$$A-(-2)\,I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = z, y = 0 \Rightarrow v_1 = (1, 0, 1)$$

$$A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2y - 2z \Rightarrow v_2 = (2, 1, 0)\,, \quad v_3 = (-2, 0, 1)$$

$$[v_1, v_2] = [(1, 0, 1)\,, (2, 1, 0)] = 4 - 0 - 1 + 0 - 1 - 0 + 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow v_1 \not\perp v_2 \Rightarrow A \text{ ni normalna}$$

2. Pokaži $A : V \to V$ je normalna $\Leftrightarrow AA^* - A^*A$ je pozitivno semidefinitna.

Rešitev

- Definiciji:
  - $A : V \to V$ je normalna $\Leftrightarrow A^*A = AA^*$
  - $A : V \to V$ je pozitivno semidefinitna $\Leftrightarrow A = A^* \wedge \forall v \in V : \langle Av, v\rangle \geq 0$
- ($\Rightarrow$) Po predpostavki velja $AA^* = A^*A \Rightarrow AA^* - A^*A = 0$.

$$AA^* - A^*A \stackrel{?}{=} (AA^* - A^*A)^* \Leftrightarrow 0 = 0^*$$

$$\langle (AA^* - A^*A)\, v, v\rangle = \langle 0v, v\rangle \stackrel{\text{homogenost}}{=} 0\,\langle v, v\rangle = 0 \geq 0$$

- ($\Leftarrow$)Po predpostavki velja $(AA^* - A^*A)^* = AA^* - A^*A$ in $\forall v \in V : \langle (AA^* - A^*A)\, v, v\rangle \geq 0$.

$$\text{sled}\,(AA^* - A^*A) = \text{sled}\,(AA^*) - \text{sled}\,(A^*A) \stackrel{\text{lastnost sledi}}{=} \text{sled}\,(AA^*) - \text{sled}\,(A^*A) = 0$$

  Sled M je vsota lastnih vrednosti M, torej je vsota lastnih vrednosti $(AA^* - A^*A) = 0$. $AA^* - A^*A \geq 0 \Rightarrow$ vse lastne vrednosti so nenegativne. Iz teh dveh trditev sledi, da je vsaka lastna vrednost $AA^* - A^*A = 0$. $AA^* - A^*A \geq 0 \Rightarrow AA^* - A^*A$ normalna. Normalne matrike je moč diagonalizirati v ortonormirani bazi:

$$AA^* - A^*A = PDP^{-1} \stackrel{\text{diagonalci so lastne vrednosti}}{=} P0P^{-1} = 0$$

$$AA^* = A^*A \Rightarrow A \text{ je normalna}$$

3. Naj bo $w_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_2 = (3, 3, -1, -1)$ in $y = (6, 0, 2, 0)$.
   (a) Poišči ortonormirano bazo za $W = \text{Lin}\,\{w_1, w_2\}$ glede na standardni skalarni produkt.
   (b) Izrazi y kot vsoto vektorja iz W in vektorja iz $W^\perp$.

Rešitev

(a) Uporabimo Gram-Schmidtov postopek in sproti normiramo bazne vektorje:

$$v_1 = (1,1,1,1)/2 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\tilde{v_2} = (3,3,-1,-1) - \langle (3,3,-1,-1), v_1\rangle v_1 = (3,3,-1,-1) - \left\langle (3,3,-1,-1), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) =$$

$$= (3,3,-1,-1) - 2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = (2,2,-2,-2), \qquad v_2 = \tilde{v_2}/\left|\left|\tilde{v_2}\right|\right| = \tilde{v_2}/4 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$$

Baza za W je $B = \{v_1, v_2\} = \left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)\right\}$.

(b) Dopolnimo B do baze $\mathbb{R}^4$. Dopolnitev $\{u_1, u_2\}$ bo ortonormirana baza za $W^\perp$, nato uporabimo Fourierov razvoj po dopolnjeni bazi. Bazo podprostora dopolnimo tako, da rešimo sistem enačb.

$$\langle (x_1,y_1,z_1,w_1), (3,3,-1,-1)\rangle = 0 \qquad \langle (x_2,y_2,z_2,w_2), (1,1,1,1)\rangle = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y, \quad z = -w \Rightarrow \tilde{u_1} = (1,-1,0,0), \quad \tilde{u_2} = (0,0,1,-1)$$

$$u_1 = \tilde{u_1}/\left|\left|\tilde{u_1}\right|\right| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0,0\right) \qquad u_2 = \tilde{u_2}/\left|\left|\tilde{u_2}\right|\right| = \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle y, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i = \left\langle (6,0,2,0), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\rangle v_1 + \left\langle (6,0,2,0), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)\right\rangle v_2 +$$

$$+ \left\langle (6,0,2,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0,0\right)\right\rangle u_1 + \left\langle (6,0,2,0), \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},\right)\right\rangle u_2 = 4v_1 + 2v_2 + \frac{6}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{2}{\sqrt{2}}u_2 =$$

$$= (2,2,2,2) + (1,1,-1,-1) + (3,-3,0,0) + (0,0,1,-1) = (3,3,1,1) \in W + (3,-3,1,-1) \in W^\perp$$

4. Poišči singularni razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev

- Iščemo U, Σ in V, da velja $A = U\Sigma V^*$.
- Diagonalci Σ so singularne vrednosti A. Singularne vrednosti A so koreni lastnih vrednosti A^*A, torej $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$.

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Stolpci V so ortonormirana baza jedra $A^*A - \sigma^2 I$ za vse singularne vrednosti σ.

$$A^*A - 4I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = z = 0 \Rightarrow v_1 = (0,1,0)$$

$$A^*A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow v_2 = (1, 0, 0)$$

$$A^*A - 0I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow v_3 = (0, 0, 1)$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Stolpci U so ortonormirana baza in velja $\forall i \in \{1..\operatorname{rang} A\} : u_i = \sigma_i^{-1} A v_i$. Stolpične vektorje $v_{\operatorname{rang} A+1}, \ldots, v_m$ najdemo tako, da dopolnimo $v_1, \ldots, v_{\operatorname{rang} A}$ do ONB.

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dobljene matrike zmnožimo, s čimer potrdimo veljavnost singularnega razcepa:

$$U\Sigma V^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Rokopisi, ki sledijo, naj služijo le kot dokaz samostojnega reševanja. Zavedam se namreč njihovega neličnega izgleda.