Največja stopnja ΔG, najmanjša δG.
Rokovanje: $\sum_{v \in VG} \deg_G v = 2\,|EG|$.
Vsak graf ima sodo mnogo vozlišč lihe stopnje.
Presek/unija grafov je presek/unija njunih V in E.
$G \cup H$ je disjunktna unija grafov $\sim VG \cap VH = \emptyset$.
Komplement grafa: $\overline{G}$ (obratna povezanost)
$0 \leq |EG| \leq \binom{|VG|}{2}$ Za padajoče d_i velja:
$(d_1, \ldots d_n)$ graf $\Leftrightarrow (d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, \ldots, d_n)$ graf
Če je AG matrika sosednosti, $\left((AG)^n\right)_{i,j}$ pove št. $i, j-$poti.

$$\text{Število trikotnikov: } \frac{\text{sled}\left((AG)^3\right)}{2 \cdot 3}$$

Sprehod je zaporedje vozlišč, ki so verižno povezana.
Dolžina sprehoda je število prehojenih povezav.
Sklenjen sprehod dolžine k: $v_0 = v_k$
Enostaven sprehod ima disjunktna vozlišča razen (v_0, v_k).
Pot v grafu: podgraf $P_k \sim$ enostaven nesklenjen sprehod.

Cikel podgraf, ki je enostaven sklenjen sprehod dolžine > 3.
Če v G $\exists$ dve različni $u, v-$poti $\Leftrightarrow G$ premore cikel
Sklenjen sprehod lihe dolžine $\in G \Leftrightarrow$ lih cikel $\in G$

Povezanost u, v sta v isti komponenti $\sim \exists\ u, v-$pot
Število komponent grafa: ΩG. G povezan $\sim \Omega G = 1$
Komponenta je maksimalen povezan podgraf.
Premer: $\operatorname{diam} G = \max\left\{d_G(v, u); \forall v, u \in VG\right\}$
Ekscentričnost: $\operatorname{ecc}_G u = max\left\{d_G(u, x); \forall x \in VG\right\}$
Polmer: $\operatorname{rad} G = \min\left\{\operatorname{ecc} u; \forall u \in VG\right\}$
$\operatorname{diam} C_n = \operatorname{rad} C_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
(Liha) ožina ($\mathrm{g}\,G$) je dolžina najkrajšega (lihega) cikla.
Vsaj en od G in $\overline{G}$ je povezan.
Povezava e je most $\Leftrightarrow \Omega(G - e) > \Omega G$
u je prerezno vozlišče $\Leftrightarrow \Omega(G - u) > \Omega G$
Za nepovezan G velja $\operatorname{diam} \overline{G} \leq 2$

Dvodelni $\sim V = A \cup B, A \cap B = \emptyset, \forall uv \in E : u \in A \oplus v \in A$
$K_{m,n}$ je poln dvodelni graf, $|A| = m$, $|B| = n$
G dvodelen $\Leftrightarrow \forall$ komponenta G dvodelna
Pot, sod cikel, hiperkocka so dvodelni, petersenov ni.
G dvodelen $\Leftrightarrow G$ ne vsebuje lihega cikla.
Biparticija glede na parnost $d_G(u, x_0)$, x_0 fiksen.
Dvodelen $k-$regularen, $|E| \geq 1 \Rightarrow |A| = |B|$. Dokaz: $\sum_{u \in A} \deg u = |E| = \cancel{k}\,|A| = \cancel{k}\,|B| = \sum_{u \in B} \deg u$

Krožni $\operatorname{Cir}(n, \{s_1, \ldots, s_k\}) : |V| = n$, množica preskokov
$\Omega \operatorname{Cir}(n, \{s, n - s\}) = \gcd\{n, s\}$
W_n (kolo) pa je cikel z univerzalnim vozliščem.

Homomorfizem $\varphi : VG \to VH$ slika povezave v povezave
Primer: K_2 je homomorfna slika $\forall$ bipartitnega grafa.
V povezavah in vozliščih surjektiven $hm\varphi$ je epimorfizem.
V vozliščih injektiven $hm\varphi$ je monomorfizem/vložitev.
Vložitev, ki ohranja razdalje, je izometrična.
Kompozitum homomorfizmov je spet homomorfizem.
Izomorfizem je bijektivni $hm\varphi$ s homomorfnim inverzom.
$im\varphi\ f : VG \to VH\ \forall u, v \in VG : uv \in EG \Leftrightarrow fufv \in EH$
Nad množico vseh grafov $\mathcal{G}$ je izomorfizem ($\cong$) ekv. rel.
$im\varphi\ G \to G$ je avtomorfizem.

$\operatorname{Aut} G$ je grupa avtomorfizmov s komponiranjem.
$\operatorname{Aut} K_n = \{\pi \in S_n = \text{permutacije } n \text{ elementov}\}$
$\operatorname{Aut} P_n = \{\text{trivialni } id, f(i) = n - i - 1\}$, $\operatorname{Aut} G \cong \operatorname{Aut} \overline{G}$
Izomorfizem ohranja stopnje, št. C_4, povezanost, $|EG|, \ldots$
$G \cong \overline{G} \Rightarrow |VG| \,\%4 \in \{0, 1\}$

Operacije H vpeti podgraf $G \Leftrightarrow \exists F \subseteq EG \ni: H = G - F$
H inducirani podgraf $G \Leftrightarrow \exists S \subseteq VG \ni: H = G - S$
H podgraf $G \Leftrightarrow \exists S \subseteq VG, F \subseteq EG \ni: H = (G - F) - S$
$uv = e \in EG$. G/e je skrčitev. (identificiramo $u = v$)
H minor G: $H = f_1 ... f_k G$ za f_i skrčitev/odstranjevanje
$VG^+e \coloneqq VG \cup \{x_e\}$, $EG^+e \coloneqq EG \setminus e \cup \{x_e u, x_e v\}$
VG^+e je subdivizija, $e \in EG$. Na e dodamo vozlišče.
H subdivizija $G \Leftrightarrow H = G^+\{e_1, \ldots, e_k\}^+\{f_1 \ldots f_j\}^+ \ldots$
Stopnja vozlišč se s subdivizijo ne poveča.
Glajenje G^-v, $v \in VG$ je obrat subdivizije. $\deg_G v = 2$
G in H sta homeomorfna, če sta subdivizija istega grafa.
Kartezični produkt: $V(G \square H) \coloneqq VG \times VH$, $E(G \square H) \coloneqq \{\{(g, h), (g', h')\}; g = g' \wedge hh' \in EH \vee h = h' \wedge gg' \in EG\}$
$(\mathcal{G}, \square)$ monoid, enota K_1. $Q_n \cong Q_{n-1} \square K_2 = Q_{n-2} \square K_2^{\square, 2}$
Disjunktna unija: G, H disjunktna. $V(G \cup H) \coloneqq VG \cup VH$, $E(G \cup H) \coloneqq EG \cup EH$
G, H dvodelna $\Rightarrow G \square H$ dvodelen

$k-$**povezan graf** ima $\geq k + 1$ vozlišč in ne vsebuje prerezne množice moči $< k$
$X \subseteq VG$ je prerezna množica $\Leftrightarrow \Omega(G - X) > \Omega G$
$Y \subseteq EG$ prerezna množica povezav $\Leftrightarrow \Omega(G - Y) > \Omega G$
Povezanost grafa: $\kappa G = \max k$, da je G $k-$povezan. Primeri: $\kappa K_n = n - 1$, $\kappa P_n = 1$, $\kappa C_n = 2$, $\kappa K_{n,m} = \min\{n, m\}$, $\kappa Q_n = n$, $\kappa G \leq \delta G$
Izrek (Menger): $|VG| \geq k + 1$: G $k-$povezan $\Leftrightarrow \forall u, v \in VG, uv \notin EG : \exists k$ notranje disjunktnih $u, v-$poti
Graf je $k-$povezan po povezavah, če ne vsebuje prerezne množice povezav moči $< k$. Povezanost grafa po povezavah: $\kappa' G = \max k$, da je G $k-$povezan po povezavah. Primeri: $\kappa' K_n = n - 1$, $\kappa' P_n = 1$, $\kappa' C_n = 2$
Izrek (Menger'): G $k-$povezan $\Leftrightarrow \forall u, v \in VG \exists k$ po povezavah disjunktnih $u, v-$poti
$\forall G \in \mathcal{G} : \kappa G \leq \kappa' G \leq \delta G$

Drevo je povezan gozd. Gozd je graf brez ciklov.
Drevo z vsaj dvema vozliščema premore dva lista. NTSE:
G drevo $\Leftrightarrow \forall u, v \in VG \exists! u, v-$pot $\Leftrightarrow \Omega G = 1 \wedge \forall e \in EG : e$ most $\Leftrightarrow \Omega G = 1 \wedge |EG| = |VG| - 1$
Vpeto drevo grafa je vpet podgraf, ki je drevo.
$\tau G \sim$ število vpetih dreves. $\Omega G = 1 \Leftrightarrow \tau G \geq 1$
$\forall e \in EG : \tau G = \tau(G - e) + \tau(G/e)$

$$\text{Laplaceova matrika: } L(G)_{ij} = \begin{cases} \deg_G v_i & ; i = j \\ -(\text{št. uv povezav}) & ; \text{drugače} \end{cases}$$

Izrek (Kirchoff): za G povezan multigraf je $\forall i : \tau G = \det(LG$ brez $i$te vrstice in $i$tega stolpca). $\tau K_n = n^{n-2}$
Prüferjeva koda, če lahko linearno uredimo vozlišča: Ponavljaj, dokler $VG \neq \emptyset$: vzemi prvi list, ga odstrani in v vektor dodaj njegovega soseda.
Blok je maksimalen povezan podgraf brez prereznih vozlišč.
$\tau G = \tau B_1 \cdot \cdots \cdot \tau B_k$ za bloke $\vec{B}$ grafa G.

Eulerjev sprehod v m.grafu vsebuje vse povezave po enkrat.

Eulerjev obhod je sklenjen eulerjev sprehod.

Eulerjev graf premore eulerjev obhod.

Za povezan multigraf G eulerjev $\Leftrightarrow \forall v \in VG : \deg_G v$ sod

Fleuryjev algoritem za eulerjev obhod v eulerjevem grafu: Začnemo v poljubni povezavi, jo izbrišemo, nadaljujemo na mostu le, če nimamo druge možne povezave.

Dekompozicija: delitev na povezavno disjunktne podgrafe.

Dekompozicija je lepa, če so podgrafi izomorfni. ($\exists$ za $P_{5,2}$)

Vsak eulerjev graf premore dekompozicijo v cikle.

Q_n eulerjev $\Leftrightarrow n$ sod

$K_{m,n,p}$ eulerjev $\Leftrightarrow m, n, p$ iste parnosti

G eulerjev $\wedge H$ eulerjev $\Rightarrow G \square H$ eulerjev

Hamiltonov cikel vsebuje vsa vozlišča grafa.

Hamilton graf premore Hamiltonov cikel.

Hamiltonova pot vsebuje vsa vozlišča.

G hamiltonov, $S \subseteq VG \Rightarrow \Omega(G - S) \leq |S|$ torej:

$\exists S \in VG : \Omega(G - S) > |S| \Rightarrow G$ ni hamiltonov. Primer: G vsebuje prerezno vozlišče $\Rightarrow G$ ni hamiltonov.

$K_{n,m}$ je hamiltonov $\Leftrightarrow m = n$ (za S vzamemo $\min\{m, n\}$)

$|VG| \geq 3, \forall u, v \in VG : \deg_G u + \deg_G v \geq |VG| \Rightarrow G$ hamil.

Dirac: $|VG| \geq 3, \forall u \in VG : \deg_G u \geq \frac{|VG|}{2} \Rightarrow G$ hamilton.

Ravninski graf brez sekanja povezav narišemo v ravnino

$K_{2,3}$ je ravninski, $K_{3,3}$, K_5, $C_5 \square C_5$ in $P_{5,2}$ niso ravninski.

Vložitev je ravninski graf z ustrezno risbo v ravnini.

Lica so sklenjena območja vložitve brez vozlišč in povezav.

G lahko vložimo v ravnino $\Leftrightarrow G$ lahko vložimo na sfero.

Dolžina lica $F \sim lF$ je št. povezav obhoda lica.

Drevo je ravninski graf z enim licem dolžine $2|ET|$

$\sum_{F \in FG} lF = 2|EG|$, $lF \geq gG$ za ravninski G

$2|EG| = \sum_{F \in FG} lF \geq \sum_{F \in FG} gG = gG|FG|$ (G ravn.)

G ravninski $\Rightarrow |EG| \geq \frac{gG}{2}|FG|$

Euler: $|VG| - |EG| + |FG| = 1 + \Omega G$ za ravninski G

G ravninski, $|VG| \geq 3 \Rightarrow |EG| \leq 3|VG| - 6$

G ravninski brez C_3, $|VG| \geq 3 \Rightarrow |EG| \leq 2|VG| - 4$

Triangulacija je taka vložitev, da so vsa lica omejena s C_3.

V maksimalen ravninski graf ne moremo dodati povezave, da bi ostal ravninski. $\sim$ Ni pravi vpet podgraf ravn. grafa.

$K_5 - e$ je maksimalen ravninski graf $\forall e \in EK_5$

G ravninski. NTSE: G triangulacija $\Leftrightarrow G$ maksimalen ravninski $\Leftrightarrow |EG| = 3|VG| - 6$

G ravninski $\Leftrightarrow$ vsaka subdivizija G ravninska.

Kuratovski: G ravn. $\Leftrightarrow$ ne vsebuje subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$

Wagner: G ravn. $\Leftrightarrow$ niti K_5 niti $K_{3,3}$ nista njegova minorja

Zunanje-ravninski ima vsa vozlišča na robu zunanjega lica.

$2-$povezan zunanje-ravninski je **hamiltonov**.

Zunanje-ravninski G, $|VG| \geq 2$ ima vozlišče stopnje ≤ 2.

Barvanje je taka $C : VG \to \{1..k\} \Leftrightarrow \forall uv \in EG : Cu \neq Cv$

Kromatično število χG je najmanjši k, $\ni$: $\exists$ $k-$barvanje G

Primer: $\chi K_n = n$, $\chi C_n = \begin{cases} 2 & ; n \text{ sod} \\ 3 & ; n \text{ lih} \end{cases}$