Rešitev šeste domače naloge Linearne Algebre

Anton Luka Šijanec

1. oktober 2024

Povzetek

Za boljšo preglednost sem svoje rešitve domače naloge prepisal na računalnik. Dokumentu sledi še rokopis. Naloge je izdelala asistentka Ajda Lemut.

1. Naj bosta V, W vektorska prostora. Pokaži, da je množica vseh linearnih preslikav $\mathcal{L}(V,W) = \{A : V \to W : A \text{ linearna}\}$ vektorski prostor.

Rešitev Definirali smo, da za linearno preslikavo velja aditivnost $L(v_1+v_2) = Lv_1 + Lv_2$ in homogenost $L\alpha v = \alpha L v$, skupaj $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L v_2 + \alpha_2 L v_2$.

Vektorski prostor pa smo definirali kot urejeno trojico $(V, +, \cdot) \ni$:

(a) $(V, +)$ je Abelova grupa: komutativnost, asociativnost, inverzi, enota, notranjost

(b) aksiomi množenja s skalarjem iz polja F: $\forall \alpha, \beta \in F \forall a, b \in V$:

 i. $\alpha \cdot (a+b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$

 ii. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$

 iii. $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$

 iv. $1 \cdot a = a$, kjer je 1 enota F

Da linearne preslikave $L : V \to W$ sploh obstajajo, privzemam, da sta V in W vektorska prostora nad istim poljem.

Treba je definirati $+$, F in $\cdot$ ter dokazati, da je pri izbranih $+$, F in $\cdot$ $(\mathcal{L}, +, \cdot)$ vektorski prostor po tej definiciji. Vzemimo za $+$ operacijo $+$ iz vektorskega prostora W in definirajmo operacijo na $\mathcal{L}$: $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}$: $(L_1 + L_2) v := L_1 v + L_2 v$. Dokažimo, da je $(\mathcal{L}, +)$ abelova grupa:

(a) Notranjost operacije: Trdimo, da je $L_1 + L_2$ linearna transformacija. Dokaz: $\forall v \in V$:

 i. Aditivnost: $(L_1+L_2)(v_1+v_2) \overset{\text{def}+}{=} L_1(v_1+v_2) + L_2(v_1+v_2) \overset{\text{aditivnost}}{=} L_1v_1 + L_1v_2 + L_2v_1 + L_2v_2 \overset{W\text{V.P.}}{=} L_1v_1 + L_2v_1 + L_1v_2 + L_2v_2 \overset{def+}{=} (L_1+L_2)v_1 + (L_1+L_2)v_2$

ii. Homogenost: $\alpha\left(L_1+L_2\right)v \overset{\text{def}+}{=} \alpha\left(L_1v+L_2v\right) \overset{W\text{V.P.}}{=} \alpha L_1v + \alpha L_2v \overset{\text{homogenost}}{=} L_1\alpha v + L_2\alpha v \overset{\text{def}+}{=} \left(L_1+L_2\right)(\alpha v)$

(b) Enote: Enota naj bo tista linearna preslikava L_0, ki slika ves V v $0 \in W$. Dokaz: $\forall L \in \mathcal{L}: \quad Lv + L_0v \overset{\text{def}L_0}{=} Lv + 0 \overset{(W,+)\text{abelova grupa}}{=} Lv$

(c) Inverzi: Ker je W V. P., $\forall w \in W \exists! -w \in W \ni: w + (-w) = 0$, zato $\forall L \in \mathcal{L} \exists -L \in \mathcal{L} \ni: -L + L = L_0$ s predpisom $-L$ slika element $v \in V$ v tisti $w \in W$, ki je inverz $Lv \in W$. $-L$ je res $\in \mathcal{L}$. Velja $-L :=(-1)\cdot L$, kjer je -1 inverz enote polja, ki ga izberemo kasneje. $\forall v \in V, L \in \mathcal{L} : ((-1)\cdot L)\,v \overset{\text{def}\cdot\text{sledi}}{=} (-1)\,(Lv) \overset{\text{def}\cdot\text{,homogenost}}{=} L\,(-1v) \overset{\text{karakteristika F}\neq 0}{\quad} L\,(-v)$. Ta dokaz se sklicuje na določitev polja in skalarnega množenja, ki ga podam kasneje.

(d) Asociativnost: $\forall L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L} : L_1 + (L_2 + L_3) = (L_1 + L_2) + L_3$ velja očitno iz definicije $+$, saj je W vektorski prostor. Komutativnost spet iz istih razlogov.

Določiti moramo še polje in množenje s skalarjem. Vzemimo za F polje vektorskega prostora W in množenje s skalarjem definirajmo takole: $\forall v \in V, \alpha \in F : (\alpha L)\,v := \alpha\,(Lv)$. Zopet za vsak slučaj dokažimo še linearnost dobljene preslikave $\forall \alpha, \beta \in F \forall L \in \mathcal{L} \forall v_1, v_2 \in V :$

(a) Aditivnost: $(\alpha L)\,(v_1 + v_2) \overset{\text{def}\cdot}{=} \alpha\,(L\,(v_1+v_2)) \overset{\text{aditivnost}}{=} \alpha\,(Lv_1 + Lv_2) \overset{W\text{V.P.}}{=} \alpha\,(Lv_1) + \alpha\,(Lv_2) \overset{\text{def}\cdot}{=} (\alpha L)\,v_1 + (\alpha L)\,v_2$

(b) Homogenost: $(\alpha L)\,(\beta v) \overset{\text{def}\cdot}{=} \alpha\,(L\,(\beta v)) \overset{\text{homogenost}}{=} \alpha\beta Lv \overset{\text{Fpolje}}{=} \beta\alpha\,(Lv) \overset{\text{def}\cdot}{=} \beta\,(\alpha L)\,v$

Iz tega dokaza sledi tudi obstoj inverzov (1c).

Sedaj lahko dokažemo še štiri aksiome vektorskih prostorov za množenje s skalarjem. $\forall \alpha, \beta \in F \forall L_1, L_2 \in V :$

(a) $\underline{\alpha\,(L_1+L_2) \overset{?}{=} \alpha L_1 + \alpha L_2}$: $(\alpha\,(L_1+L_2))\,v \overset{\text{def}+\cdot}{=} \alpha\,(L_1v + L_2v) \overset{W\text{V.P.}}{=} \alpha L_1 + \alpha L_2$

(b) $\underline{(\alpha+\beta)\,L_1 = \alpha L_1 + \beta L_1}$: Po definiciji našega $\cdot$.

(c) $\underline{\alpha\,(\beta L_1) = (\alpha\beta)\,L_1}$: Po definiciji našega $\cdot$.

(d) $\underline{1 \cdot L_1 = L_1}$: $(1 \cdot L_1)\,v \overset{\text{def}\cdot}{=} 1 \cdot (L_1v) \overset{W\text{V.P.}}{=} L_1v$

2. Naj bo $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje preko ravnine $x+y+z=0$. Določi matriko Z v standardni bazi.

Rešitev Tri točke na taki ravnini so $(0,0,0)$, $(1,0,-1)$ in $(0,1,-1)$. Normala ravnine je $(1,0,-1)\times(0,1,-1) = (1,1,1)$. Parametrično to ravnino zapišemo kot $\{s\vec{r} + p\vec{q}; s, p \in \mathbb{R}\}$, kjer $\vec{r} = (1,0,-1)$ in $\vec{q} = (0,1,-1)$. Za določitev matrike linearne preslikave Z bomo zrcalili vektorje standardne baze $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ in $(0,0,1)$ čez to ravnino. Zrcaljenje $\vec{t}$ v $Z\vec{t}$ čez ravnino je opisano z enačbo $Z\vec{t} = \vec{t} + 2\left(\hat{t} - \vec{t}\right) = 2\hat{t} - \vec{t}$, kjer s $\hat{t}$ označim pravokotno projekcijo točke $\vec{t}$ na ravnino. Torej najprej tako projicirajmo standardno bazo na ravnino.

$$\langle \hat{t} - \vec{t}, \vec{q}\rangle = 0 = \langle \hat{t} - \vec{t}, \vec{r}\rangle \quad \text{(pravokotna projekcija)}$$
$$\langle s\vec{r} + p\vec{q} - \vec{t}, \vec{q}\rangle = 0 = \langle s\vec{r} + p\vec{q} - \vec{t}, \vec{r}\rangle \quad \text{(parametrični zapis } \hat{t}\text{)}$$
$$s\langle \vec{r}, \vec{q}\rangle + p\langle \vec{q}, \vec{q}\rangle - \langle \vec{t}, \vec{q}\rangle = 0 = s\langle \vec{r}, \vec{r}\rangle + p\langle \vec{q}, \vec{r}\rangle - \langle \vec{t}, \vec{r}\rangle$$

$$s\langle \vec{r}, \vec{q}\rangle + p\langle \vec{q}, \vec{q}\rangle = \langle \vec{t}, \vec{q}\rangle$$
$$s\langle \vec{r}, \vec{r}\rangle + p\langle \vec{q}, \vec{r}\rangle = \langle \vec{t}, \vec{r}\rangle$$

Dobimo sistem enačb z neznankama s in p, parametroma projekcije. Vstavimo $\vec{r} = (1,0,-1)$ in $\vec{q} = (0,1,-1)$ ter za $\vec{t}$ posamično vse tri točke standardne baze in izračunajmo njihove projekcije.

$$s \cdot 1 + p \cdot 2 = \langle \vec{t}, (0,1,-1)\rangle$$
$$s \cdot 2 + p \cdot 1 = \langle \vec{t}, (1,0,-1)\rangle$$

Nato izračunamo še njihovo zrcaljenje iz projekcij po enačbi za zrcaljenje zgoraj.

$\vec{b_1} = (1,0,0)$	$\vec{b_2} = (0,1,0)$	$\vec{b_3} = (0,0,1)$
$s + 2p = 0$	$s + 2p = 1$	$s + 2p = -1$
$2s + p = 1$	$2s + p = 0$	$2s + p = -1$
$s = -2p$	$p = -2s$	$s = -2p - 1$
$p - 4p = 1$	$s - 4s = 1$	$2\left(-2p - 1\right) + p = -1$
$p = -\frac{1}{3}, \quad s = \frac{2}{3}$	$p = \frac{2}{3}, \quad s = -\frac{1}{3}$	$p = -\frac{1}{3}, \quad s = -\frac{1}{3}$
$\hat{t} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$	$\hat{b_2} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$	$\hat{b_2} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
$Z\vec{b_1} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$	$Z\vec{b_2} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$	$Z\vec{b_3} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Dobljene z Z preslikane (čez ravnino zrcaljene) vektorje po stolpcih zložimo v matriko Z:

$$Z = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

3. Določi rang matrike

$$B = \begin{bmatrix} -2-t & 4 & 5+t & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -t & 3 & 1+t & 4+t \end{bmatrix}$$

v odvisnosti od parametra t.

Rešitev Za $A : V \to U$ smo definirali $\mathrm{rang} A := \dim \mathrm{Im} A$, kjer je $\mathrm{Im} A := \{Av; v \in V\}$. Dokazali smo, da je rang matrike enak številu linearno neodvisnih vrstic matrike in da velja $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} A^T$.

$$\mathrm{rang} \begin{bmatrix} -2-t & 4 & 5+t & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -t & 3 & 1+t & 4+t \end{bmatrix} = \mathrm{rang} \begin{bmatrix} -2-t & 1 & -t \\ 4 & -1 & 3 \\ 5+t & -2 & 1+t \\ 4 & 1 & 4+t \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2-t & 1 & -t \\ 5+t & -2 & 1+t \\ 4 & 1 & 4+t \end{bmatrix} = \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5+t & -2 & 1+t \\ 4 & 1 & 4+t \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1+t & -3 & -3 \\ 4 & 1 & 4+t \end{bmatrix} = \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1+t & -3 & -3 \\ 4 & 1 & 4+t \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 13 \\ 0 & -5-t & 1+4t \\ 0 & -7 & 20+t \end{bmatrix} = \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{-58+15t}{7} \\ 0 & 0 & 7+t \end{bmatrix}$$

Rang je vsaj 2, ker sta $(1, 2, -4)$ in $(0, -7, 13)$ linearno neodvisna. Rang je kvečjemu 3, ker je manjša izmed stranic matrike dolžine 3. Rang ne more biti 2, ker sistem $\frac{-58+15t}{7} = 7 + t = 0$ nima rešitve. $\mathrm{rang} B = 3$.

4. Poišči karakteristični in minimalni polinom matrike

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in s pomočjo Cayley-Hamiltonovega izreka določi njen inverz.

$$\nabla_P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 3 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -3(3+\lambda) - 2(4-\lambda) - 10\lambda + \lambda(3+\lambda)(4-\lambda) + 10 + 6 =$$

$$-9-3\lambda-8+2\lambda-10\lambda+\left(3\lambda+\lambda^2\right)(4-\lambda)+16=$$

$$=-17+16-11\lambda+12\lambda-3\lambda^2+4\lambda^2-\lambda^3=-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$$

Eno ničlo uganemo ($\lambda_1=1$), nato $-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1:\lambda-1=-\lambda^2+1=(1+\lambda)(1-\lambda)$. 1 je torej dvojna ničla, $\lambda_2=-1$ pa enojna. Ker $m_A(\lambda)\,|\nabla_A(\lambda)$, je kandidat za $m_A(\lambda)$ poleg $-\nabla_A(\lambda)$ še $p(\lambda)=(\lambda-x)(\lambda+1)=1-\lambda^2$. Po Cayley-Hamiltonovem izreku $m_A(A)=0=\nabla_A(A)$. Toda ker $I-A^2\neq 0$, je $m_A(\lambda)=-\nabla_A(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$. Izračunajmo inverz:

$$m_A(A)=A^3-A^2-A+I=0 \qquad /-I$$

$$A^3-A^2-A=-I \qquad /\cdot A^{-1}$$

$$A^3A^{-1}-A^2A^{-1}-AA^{-1}=-IA^{-1} \qquad /\cdot(-I)$$

$$-A^2+A+I=A^1=$$

$$=-\begin{bmatrix}4&-5&3\\2&-3&2\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-5&3\\2&-3&2\\-1&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-5&3\\2&-3&2\\-1&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2&-3&1\\2&-3&2\\1&-1&2\end{bmatrix}\text{, kar je res } A^{-1}.$$

Rokopisi, ki sledijo, naj služijo le kot dokaz samostojnega reševanja. Zavedam se namreč njihovega neličnega izgleda.