# Rešitev osme domače naloge Linearne Algebre

Anton Luka Šijanec

20. maj 2024

**Povzetek**

Za boljšo preglednost sem svoje rešitve domače naloge prepisal na računalnik. Dokumentu sledi še rokopis. Naloge je izdelala asistentka Ajda Lemut.

1. Dokaži, da je $[(x,y,z),(u,v,w)] = 2xu - yu - xv + 2yv - zv - yw + zw$ skalarni produkt in ugotovi, ali je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

normalna preslikava glede na $[\cdot,\cdot]$.

**Rešitev** Predpostavljam polje $\mathbb{R}$ in vektorski prostor $V = \mathbb{R}^3$, saj v kompleksnem to ni skalarni produkt (protiprimer pozitivne definitnosti je $[(1,1,1+i),(1,1,1+i)] = 2$). $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ je skalarni produkt, če zadošča naslednjim lastnostim. Dokažimo jih za $[\cdot,\cdot]$.

(a) $\forall v \in V : v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v\rangle > 0$

$$[(x,y,z),(x,y,z)] = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2 = 2\left(x^2 - xy + y^2\right) - 2yz + z^2 =$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right) - 2yz + z^2 = 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{3y^2}{4} - 2yz + z^2 =$$

$$= 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{2}} - \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{z^2}{3} \geq 0$$

Sedaj poiščimo ničle. Fiksirajmo poljubna $y$, $z$ in uporabimo obrazec za ničle kvadratne enačbe:

$$x_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 8\left(2y^2 - 2yz + z^2\right)}}{4}$$

Iščemo pozitivne diskriminante.

$$4y^2 - 8\left(2y^2 - 2yz + z^2\right) = -12y^2 + 16yz - 8z^2 = 4$$

Fiksirajmo poljuben $z$. Vodilni koeficient kvadratne enačbe je negativen. Uporabimo obrazec:

$$y_{1,2} = \frac{-16z \pm \sqrt{256z^2 - 384z^2 = -128z^2}}{-24}$$

Diskriminanta je nenegativna $\Leftrightarrow z = 0$. Torej $z = 0$, zato $y = 0$ in tudi $x = 0$ glede na obrazce. Skalarni produkt je res pozitivno definiten.

(b) $\forall v, u \in V : \langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$

$$[(u,v,w),(x,y,z)] = [(x,y,z),(u,v,w)]$$

$$2ux - vx - uy - 2vy - wy - vz + wz = 2xu - yu - xv + 2yv - zv - vz + wz$$

$$0 = 0$$

Skalarni produkt je res simetričen.

(c) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \forall u_1, u_2, v \in V : \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, v\rangle = \alpha_1 \langle u_1, v\rangle + \alpha_2 \langle u_2, v\rangle$

$$[\alpha\left(\left(x_1, y_1, z_1\right) + \left(x_2, y_2, z_2\right)\right), (u, v, w)] =$$

$$= 2\alpha\left(x_1 + x_2\right) u - \alpha\left(y_1 + y_2\right) u - \alpha\left(x_1 + x_2\right) v + 2\alpha\left(y_1 + y_2\right) v - \alpha\left(z_1 + z_2\right) v - \alpha\left(y_1 + y_2\right) w + \alpha\left(z_1 + z_2\right) w =$$
$$= \alpha\left(2\left(x_1 + x_2\right) u - \left(y_1 + y_2\right) u - \left(x_1 + x_2\right) v + 2\left(y_1 + y_2\right) v - \left(z_1 + z_2\right) v - \left(y_1 + y_2\right) w + \left(z_1 + z_2\right) w\right) =$$
$$= \alpha\left(2x_1 u + 2x_2 u - y_1 u - y_2 u - x_1 v - x_2 v + 2y_1 v + 2y_2 v - z_1 v - z_2 v - y_1 w - y_2 w + z_1 w + z_2 w\right) =$$
$$= \alpha\left(2x_1 u - y_1 u - x_1 v + 2y_1 v - z_1 v - y_1 w + z_1 w\right) + \alpha\left(2x_2 u - y_2 u - x_2 v + 2y_2 v - z_2 v - y_2 w + z_2 w\right) =$$
$$= \alpha\left[\left(x_1, y_1, z_1\right), (u, v, w)\right] + \alpha\left[\left(x_2, y_2, z_2\right), (u, v, w)\right]$$

Skalarni produkt je res homogen in linearen v prvem faktorju.

Po definiciji $A$ normalna $\Leftrightarrow A^*A = AA^*$. Izračunajmo torej matriko $A^*$.

- Na predavanjih 2024-05-08 smo dokazali, da za vsak skalarni produkt $[u, v]$ obstaja taka pozitivno definitna matrika $M$, da velja $[u, v] = \langle u, Mv\rangle = u^* v$, kjer je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt.
- Na predavanjih 2024-04-17 smo dokazali, da $[L^*]_{C\leftarrow B} = \left([L]_{B\leftarrow C}\right)^*$, torej $PLP^{-1} = \left(P^{-1}L^*P\right)^*$.
- Izpeljimo predpis za $A^*$ pri podani matriki $A$ in skalarnem produktu $[\cdot, \cdot]$ s pripadajočo matriko $M$:

$$[A^*x, y] = [x, Ay]\text{, uporabimo prvo točko:}$$

$$\langle A^*x, My\rangle = \langle x, MAy\rangle\text{, pišimo } z = My\text{:}$$
$$\langle A^*x, z\rangle = \left\langle x, MAM^{-1}z\right\rangle\text{, upoštevajmo drugo točko:}$$
$$\langle A^*x, z\rangle = \left\langle M^{-1}A^{\square}Mx, z\right\rangle\text{, kjer je } A^{\square} \text{ adjungacija } A \text{ pri standardnem skalarnem produktu}$$

$$\Rightarrow A^* = M^{-1}A^{\square}M = M^{-1}\overline{A}^T M \overset{A\in M(\mathbb{R})}{=} M^{-1}A^T M$$

- Potrebujemo še matriko skalarnega produkta.

$$\langle (x, y, z), M(u, v, w)\rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} um_{11} + vm_{12} + wm_{13} \\ um_{21} + vm_{22} + wm_{23} \\ um_{31} + vm_{32} + wm_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} & xum_{11} & xvm_{12} & xwm_{13} & + \\ + & yum_{21} & yvm_{22} & ywm_{23} & + \\ + & zum_{31} & zvm_{32} & zwm_{33} & \end{matrix} = [(x, y, z), (u, v, w)] = 2xu - yu - xv + 2yv - zv - yw + zw\text{, torej}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\text{, njen inverz pa je } M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Izračunamo $A^*$ po formuli $A^* = M^{-1}A^T M$ in preverimo $A^*A = AA^*$:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -10 & 14 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = AA^*$$

$A$ ni normala matrika.

- Da preverimo pravilnost matrike $A^*$, lahko napravimo preizkus:

```
sage: A = Matrix([[0, 2, -2], [0, 1, 0], [-1, 2, -1]])
sage: AA = Matrix([[-1, 2, -1], [-2, 3, -1], [-6, 6, -2]])
sage: def sp(a,b): return 2*a[0]*b[0]-a[1]*b[0]-a[0]*b[1]+2*a[1]*b[1]-a[2]*b[1]-a[1]*b[2]+a[2]*b[2]
sage: xyz = vector([var("x"), var("y"), var("z")])
sage: uvw = vector([var("u"), var("v"), var("w")])
sage: (sp(A*xyz, uvw) == sp(xyz, AA*uvw)).expand()
v*x - w*x + 3*u*y - 2*v*y + w*y - 4*u*z + 3*v*z - w*z == v*x - w*x + 3*u*y - 2*v*y + w*y - 4*u*z + 3*v*z - w*z
sage: bool((sp(A*xyz, uvw) == sp(xyz, AA*uvw)).expand())
True
sage:
```

Slika 1: Preizkus s programom SageMath.

2. Pokaži $A : V \to V$ je normalna $\Leftrightarrow AA^* - A^*A$ je pozitivno semidefinitna.

**Rešitev**

- Definiciji:
  - $A : V \to V$ je normalna $\Leftrightarrow A^*A = A^*$
  - $A : V \to V$ je pozitivno semidefinitna $\Leftrightarrow A = A^* \wedge \forall v \in V : \langle Av, v\rangle \geq 0$
- ($\Rightarrow$) Po predpostavki velja $AA^* = A^*A \Rightarrow AA^* - A^*A = 0$.

$$AA^* - A^*A \stackrel{?}{=} (AA^* - A^*A)^* \Leftrightarrow 0 = 0^*$$

$$\langle (AA^* - A^*A)\, v, v\rangle = \langle 0v, v\rangle \stackrel{\text{homogenost}}{=} 0\,\langle v, v\rangle = 0 \geq 0$$

- ($\Leftarrow$)Po predpostavki velja $(AA^* - A^*A)^* = AA^* - A^*A$ **TODO TODO TODO XXX XXX XXX XXX XXX XXX TODO TODO TODO**

3. Naj bo $w_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_2 = (3, 3, -1, -1)$ in $y = (6, 0, 2, 0)$.
   (a) Poišči ortonormirano bazo za $W = \mathrm{Lin}\{w_1, w_2\}$ glede na standardni skalarni produkt.
   (b) Izrazi $y$ kot vsoto vektorja iz $W$ in vektorja iz $W^\perp$.

**Rešitev**

(a) Uporabimo Gram-Schmidtov postopek in sproti normiramo bazne vektorje:

$$v_1 = (1, 1, 1, 1)/2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\tilde{v_2} = (3, 3, -1, -1) - \langle (3, 3, -1, -1), v_1\rangle\, v_1 = (3, 3, -1, -1) - \left\langle (3, 3, -1, -1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (3, 3, -1, -1) - 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, 2, -2, -2), \qquad v_2 = \tilde{v_2}/\,||\tilde{v_2}|| = \tilde{v_2}/4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

Baza za $W$ je $B = \{v_1, v_2\} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)\right\}$.

(b) Dopolnimo $B$ do baze $\mathbb{R}^4$. Dopolnitev $\{u_1, u_2\}$ bo ortonormirana baza za $W^\perp$, nato uporabimo Fourierov razvoj po dopolnjeni bazi. Bazo podprostora dopolnimo tako, da rešimo sistem enačb.

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (3, 3, -1, -1)\rangle = 0 \qquad \langle (x_2, y_2, z_2, w_2), (1, 1, 1, 1)\rangle = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y, \quad z = -w \Rightarrow \tilde{u_1} = (1, -1, 0, 0), \quad \tilde{u_2} = (0, 0, 1, -1)$$

$$u_1 = \tilde{u_1}/\,||\tilde{u_1}|| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \qquad u_2 = \tilde{u_2}/\,||\tilde{u_2}|| = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle y,v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}v_i=\left\langle (6,0,2,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\rangle v_1+\left\langle (6,0,2,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)\right\rangle v_2+$$
$$+\left\langle (6,0,2,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0,0\right)\right\rangle u_1+\left\langle (6,0,2,0),\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},\right)\right\rangle u_2=4v_1+2v_2+\frac{6}{\sqrt{2}}u_1+\frac{2}{\sqrt{2}}u_2=$$
$$=(2,2,2,2)+(1,1,-1,-1)+(3,-3,0,0)+(0,0,1,-1)=(3,3,1,1)\in W+(3,-3,1,-1)\in W^{\perp}$$

4. Poišči singularni razcep matrike

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

**Rešitev**

- Iščemo $U$, $\Sigma$ in $V$, da velja $A=U\Sigma V^*$.
- Diagonalci $\Sigma$ so singularne vrednosti $A$. Singularne vrednosti $A$ so koreni lastnih vrednosti
- $A^*A$, torej $\sigma_1=2$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$.

$$A^*A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1&0&0\\0&\sigma_2&0\\0&0&\sigma_3\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

- Stolpci $V$ so ortonormirana baza jedra $A^*A-\sigma^2I$ za vse singularne vrednosti $\sigma$.

$$A^*A-4I=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x=0\Rightarrow v_1=(0,1,0)$$

$$A^*A-1I=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow y=0\Rightarrow v_2=(1,0,0)$$

$$A^*A-0I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x=y=0\Rightarrow v_3=(0,0,1)$$

$$V=\begin{bmatrix}v_1&v_2&v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- Stolpci $U$ so ortonormirana baza in velja $\forall i\in\{1..\operatorname{rang}A\}:u_i=\sigma_i^{-1}Av_i$. Stolpične vektorje $v_{\operatorname{rang}A+1},\dots,v_m$ najdemo tako, da dopolnimo $v_1,\dots,v_{\operatorname{rang}A}$ do ONB.

$$U=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

- Dobljene matrike zmnožimo, s čimer potrdimo veljavnost singularnega razcepa:

$$U\Sigma V^*=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=A$$

Rokopisi, ki sledijo, naj služijo le kot dokaz samostojnega reševanja. Zavedam se namreč njihovega neličnega izgleda.