

Rešitev osme domače naloge Linearne Algebre

ANTON LUKA ŠIJANEC

21. maj 2024

Povzetek

Za boljšo preglednost sem svoje rešitve domače naloge prepisal na računalnik. Dokumentu sledi še rokopis. Naloge je izdelala asistentka Ajda Lemut.

1. Dokaži, da je $[(x, y, z), (u, v, w)] = 2xu - yu - xv + 2yv - zv - yw + zw$ skalarni produkt in ugotovi, ali je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

normalna preslikava glede na $[\cdot, \cdot]$.

Rešitev Predpostavljam polje \mathbb{R} in vektorski prostor $V = \mathbb{R}^3$, saj v kompleksnem to ni skalarni produkt (protiprimer pozitivne definitnosti je $[(1, 1, 1 + i), (1, 1, 1 + i)] = 2$). $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je skalarni produkt, če zadošča naslednjim lastnostim. Dokažimo jih za $[\cdot, \cdot]$.

(a) $\forall v \in V : v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$

$$\begin{aligned} [(x, y, z), (x, y, z)] &= 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2 = 2(x^2 - xy + y^2) - 2yz + z^2 = \\ &= 2\left(\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right) - 2yz + z^2 = 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{3y^2}{4} - 2yz + z^2 = \\ &= 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{2}} - \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{z^2}{3} \geq 0 \end{aligned}$$

Sedaj poiščimo ničle. Fiksirajmo poljubna y, z in uporabimo obrazec za ničle kvadratne enačbe:

$$x_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 8(2y^2 - 2yz + z^2)}}{4}$$

Iščemo pozitivne diskriminante.

$$4y^2 - 8(2y^2 - 2yz + z^2) = -12y^2 + 16yz - 8z^2 = 4$$

Fiksirajmo poljuben z . Vodilni koeficient kvadratne enačbe je negativen. Uporabimo obrazec:

$$y_{1,2} = \frac{-16z \pm \sqrt{256z^2 - 384z^2} = -128z^2}{-24}$$

Diskriminanta je nenegativna $\Leftrightarrow z = 0$. Torej $z = 0$, zato $y = 0$ in tudi $x = 0$ glede na obrazec. Skalarni produkt je res pozitivno definiten.

(b) $\forall v, u \in V : \langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$

$$\begin{aligned} [(u, v, w), (x, y, z)] &= [(x, y, z), (u, v, w)] \\ 2ux - vx - uy - 2vy - wy - vz + wz &= 2xu - yu - xv + 2yv - zv - vz + wz \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Skalarni produkt je res simetričen.

$$(c) \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \forall u_1, u_2, v \in V : \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$$

$$\begin{aligned} & [\alpha((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)), (u, v, w)] = \\ & = 2\alpha(x_1 + x_2)u - \alpha(y_1 + y_2)u - \alpha(x_1 + x_2)v + 2\alpha(y_1 + y_2)v - \alpha(z_1 + z_2)v - \alpha(y_1 + y_2)w + \alpha(z_1 + z_2)w = \\ & = \alpha(2(x_1 + x_2)u - (y_1 + y_2)u - (x_1 + x_2)v + 2(y_1 + y_2)v - (z_1 + z_2)v - (y_1 + y_2)w + (z_1 + z_2)w) = \\ & = \alpha(2x_1u + 2x_2u - y_1u - y_2u - x_1v - x_2v + 2y_1v + 2y_2v - z_1v - z_2v - y_1w - y_2w + z_1w + z_2w) = \\ & = \alpha(2x_1u - y_1u - x_1v + 2y_1v - z_1v - y_1w + z_1w) + \alpha(2x_2u - y_2u - x_2v + 2y_2v - z_2v - y_2w + z_2w) = \\ & = \alpha[(x_1, y_1, z_1), (u, v, w)] + \alpha[(x_2, y_2, z_2), (u, v, w)] \end{aligned}$$

Skalarni produkt je res homogen in linearen v prvem faktorju.

Po definiciji A normalna $\Leftrightarrow A^*A = AA^*$. Izračunajmo torej matriko A^* .

- Na predavanjih 2024-05-08 smo dokazali, da za vsak skalarni produkt $[u, v]$ obstaja taka pozitivno definitna matrika M , da velja $[u, v] = \langle u, Mv \rangle = u^*v$, kjer je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt.
- Na predavanjih 2024-04-17 smo dokazali, da $[L^*]_{C \leftarrow B} = ([L]_{B \leftarrow C})^*$, torej $PLP^{-1} = (P^{-1}L^*P)^*$.
- Izpeljimo predpis za A^* pri podani matriki A in skalarnem produktu $[\cdot, \cdot]$ s pripadajočo matriko M :

$$[A^*x, y] = [x, Ay], \text{ uporabimo prvo točko:}$$

$$\langle A^*x, My \rangle = \langle x, MAy \rangle, \text{ pišimo } z = My:$$

$$\langle A^*x, z \rangle = \langle x, MAM^{-1}z \rangle, \text{ upoštevajmo drugo točko:}$$

$$\langle A^*x, z \rangle = \langle M^{-1}A^\square Mx, z \rangle, \text{ kjer je } A^\square \text{ adjungacija } A \text{ pri standardnem skalarnem produktu}$$

$$\Rightarrow A^* = M^{-1}A^\square M = M^{-1}\overline{A}^T M \stackrel{A \in M(\mathbb{R})}{=} M^{-1}A^T M$$

- Potrebujemo še matriko skalarnega produkta.

$$\langle (x, y, z), M(u, v, w) \rangle = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} um_{11} + vm_{12} + wm_{13} \\ um_{21} + vm_{22} + wm_{23} \\ um_{31} + vm_{32} + wm_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} xum_{11} & xvm_{12} & xwm_{13} & + \\ + & yum_{21} & yvm_{22} & ywm_{23} & + \\ + & zum_{31} & zvm_{32} & zwm_{33} \end{matrix} = [(x, y, z), (u, v, w)] = 2xu - yu - xv + 2yv - zv - yw + zw, \text{ torej} \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ njen inverz pa je } M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Izračunamo A^* po formuli $A^* = M^{-1}A^T M$ in preverimo $A^*A = AA^*$:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -10 & 14 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = AA^*$$

A ni normalna matrika.

- Da preverimo pravilnost matrike A^* , lahko napravimo preizkus:

```
sage: A = Matrix([[0, 2, -2], [0, 1, 0], [-1, 2, -1]])
sage: AA = Matrix([[-1, 2, -1], [-2, 3, -1], [-6, 6, -2]])
sage: def sp(a,b): return 2*a[0]*b[0]-a[1]*b[0]-a[0]*b[1]+2*a[1]*b[1]-a[1]*b[2]+a[2]*b[2]
sage: xyz = vector([var("x"), var("y"), var("z")])
sage: uvw = vector([var("u"), var("v"), var("w")])
sage: (sp(A*xyz, uvw) == sp(xyz, AA*uvw)).expand()
v*x - w*x + 3*u*x - 2*v*x + w*y - 4*u*z + 3*v*z - w*z == v*x - w*x + 3*u*x - 2*v*x + w*y - 4*u*z + 3*v*z - w*z
sage: bool((sp(A*xyz, uvw) == sp(xyz, AA*uvw)).expand())
True
sage:
```

Slika 1: Preizkus s programom SageMath.

2. Pokaži $A : V \rightarrow V$ je normalna $\Leftrightarrow AA^* - A^*A$ je pozitivno semidefinitna.

Rešitev

- Definiciji:
 - $A : V \rightarrow V$ je normalna $\Leftrightarrow A^*A = A^*$
 - $A : V \rightarrow V$ je pozitivno semidefinitna $\Leftrightarrow A = A^* \wedge \forall v \in V : \langle Av, v \rangle \geq 0$
- (\Rightarrow) Po predpostavki velja $AA^* = A^*A \Rightarrow AA^* - A^*A = 0$.

$$AA^* - A^*A \stackrel{?}{=} (AA^* - A^*A)^* \Leftrightarrow 0 = 0^*$$

$$\langle (AA^* - A^*A)v, v \rangle = \langle 0v, v \rangle \stackrel{\text{homogenost}}{=} 0 \langle v, v \rangle = 0 \geq 0$$

- (\Leftarrow) Po predpostavki velja $(AA^* - A^*A)^* = AA^* - A^*A$ **TODO TODO TODO XXX XXX XXX XXX XXX XXX TODO TODO TODO**

3. Naj bo $w_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_2 = (3, 3, -1, -1)$ in $y = (6, 0, 2, 0)$.

- Poišči ortonormirano bazo za $W = \text{Lin}\{w_1, w_2\}$ glede na standardni skalarni produkt.
- Izrazi y kot vsoto vektorja iz W in vektorja iz W^\perp .

Rešitev

- Uporabimo Gram-Schmidtov postopek in sprti normiramo bazne vektorje:

$$v_1 = (1, 1, 1, 1)/2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2 &= (3, 3, -1, -1) - \langle (3, 3, -1, -1), v_1 \rangle v_1 = (3, 3, -1, -1) - \left\langle (3, 3, -1, -1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\rangle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \\ &= (3, 3, -1, -1) - 2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, 2, -2, -2), \quad v_2 = \tilde{v}_2 / \|\tilde{v}_2\| = \tilde{v}_2/4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right) \end{aligned}$$

Baza za W je $B = \{v_1, v_2\} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right) \right\}$.

- Dopolnimo B do baze \mathbb{R}^4 . Dopolnitev $\{u_1, u_2\}$ bo ortonormirana baza za W^\perp , nato uporabimo Fourierov razvoj po dopoljnjeni bazi. Bazo podprostora dopolnimo tako, da rešimo sistem enačb.

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (3, 3, -1, -1) \rangle = 0 \quad \langle (x_2, y_2, z_2, w_2), (1, 1, 1, 1) \rangle = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y, \quad z = -w \Rightarrow \tilde{u}_1 = (1, -1, 0, 0), \quad \tilde{u}_2 = (0, 0, 1, -1)$$

$$u_1 = \tilde{u}_1 / \|\tilde{u}_1\| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \quad u_2 = \tilde{u}_2 / \|\tilde{u}_2\| = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{i=1}^n \frac{\langle y, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i = \left\langle (6, 0, 2, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\rangle v_1 + \left\langle (6, 0, 2, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2} \right) \right\rangle v_2 + \\
&+ \left\langle (6, 0, 2, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \right\rangle u_1 + \left\langle (6, 0, 2, 0), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle u_2 = 4v_1 + 2v_2 + \frac{6}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{2}{\sqrt{2}}u_2 = \\
&= (2, 2, 2, 2) + (1, 1, -1, -1) + (3, -3, 0, 0) + (0, 0, 1, -1) = (3, 3, 1, 1) \in W + (3, -3, 1, -1) \in W^\perp
\end{aligned}$$

4. Poišči singularni razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev

- Iščemo U , Σ in V , da velja $A = U\Sigma V^*$.
- Diagonalci Σ so singularne vrednosti A . Singularne vrednosti A so koreni lastnih vrednosti A^*A , torej $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$.

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Stolpci V so ortonormirana baza jedra $A^*A - \sigma^2 I$ za vse singularne vrednosti σ .

$$A^*A - 4I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow v_1 = (0, 1, 0)$$

$$A^*A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow v_2 = (1, 0, 0)$$

$$A^*A - 0I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow v_3 = (0, 0, 1)$$

$$V = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Stolpci U so ortonormirana baza in velja $\forall i \in \{1.. \text{rang } A\} : u_i = \sigma_i^{-1} A v_i$. Stolpične vektorje $v_{\text{rang } A+1}, \dots, v_m$ najdemo tako, da dopolnimo $v_1, \dots, v_{\text{rang } A}$ do ONB.

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dobljene matrike zmnožimo, s čimer potrdimo veljavnost singularnega razcepa:

$$U\Sigma V^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Rokopisi, ki sledijo, naj služijo le kot dokaz samostojnega reševanja. Zavedam se namreč njihovega neličnega izgleda.